IL NUOVO CIMENTO
ANNO XXXVIII.

IL NUOVO CIMENTO

GIORNALE FONDATO PER LA FISICA E LA CHIMICA

DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA

CONTINUATO

PER LA FISICA ESPERIMENTALE E MATEMATICA

da E. BETTI e R. FELICI

Terza serie Tomo XXXI.

PISA

TIP. PIERACCINI DIR. DA P. SALVIONI

1892

CONSIDERAZIONI SULLA TEORIA MATEMATICA DEL MAGNETISMO;
MEMORIA DEL PROF. EUGENIO BELTRAMI [1]).

§ 6. Si ponga

$$V' = \int \left(\frac{d\frac{1}{r}}{da} m_a' + \frac{d\frac{1}{r}}{db} m_b' + \frac{d\frac{1}{r}}{dc} m_c' \right) dS'$$

$$= \int \frac{k' dS'}{r} + \int \frac{h' d\sigma'}{r} ,$$

cioè (§ 3) si rappresenti con V' la funzione potenziale d' una seconda distribuzione polare m', esistente in uno spazio S', spazio che si suppone *arbitrariamente* scelto rispetto ad S. Dalla formola (2), ponendo $U = V'$, si deduce:

$$\int \left(\frac{dV'}{da} m_a + \frac{dV'}{db} m_b + \frac{dV'}{dc} m_c \right) dS = \int V' k dS + \int V' h d\sigma$$

e similmente, immaginando fatti i debiti scambii di simboli,

$$\int \left(\frac{dV}{da} m_a' + \frac{dV}{db} m_b' + \frac{dV}{dc} m_c' \right) dS' = \int V k' dS' + \int V h' d\sigma' .$$

I secondi membri di queste due equazioni sono eguali fra loro, poichè ciascun d' essi rappresenta il potenziale mutuo delle

1) *Continuazione.* Vedi pag. 222 del Volume precedente.

due distribuzioni apolari (k, h), $(k'\ h')$: quindi anche i primi membri sono eguali fra loro, cioè si ha sempre:

$$\int\left(\frac{dV}{da}m_a'+\frac{dV}{db}m_b'+\frac{dV}{dc}m_c'\right)dS'$$

(6)

$$=\int\left(\frac{dV'}{da}m_a+\frac{dV'}{db}m_b+\frac{dV'}{dc}m_c\right)dS.$$

Ma quest' eguaglianza non deve interpretarsi senz' altro come espressione del *principio di reciprocità dei potenziali mutui*, in quanto questo principio possa per avventura essere esteso alle distribuzioni *polari*. I due membri della precedente eguaglianza non rappresentano, in generale, il potenziale mutuo delle due distribuzioni polari m, m'. Come resulta dalle relazioni che precedono la (6), e come si avrà occasione di rammentare in seguito (§ 10), essi non rappresentano veramente questo potenziale se non quando i due spazii S, S' non abbiano veruna parte in comune.

Ciò nondimeno l' eguaglianza (6), considerata dal punto di vista puramente analitico, è sempre vera, anche quando, in particolare, i due spazii S, S' coincidano fra loro, e rappresenta una proprietà di cui si può far uso molto vantaggiosamente in varie occasioni.

§ 7. Vi sono distribuzioni polari la cui funzione potenziale V è *nulla in tutto lo spazio*. Sono evidentemente (§ 3) quelle, e quelle sole, per le quali sussiste: in ogni punto dello spazio S da esse occupato, l' equazione

$$\frac{dm_a}{da}+\frac{dm_b}{db}+\frac{dm_c}{dc}=0, \tag{7}$$

in ogni punto d' una superficie di discontinuità l' equazione

$$m_n+m_n'=0 \tag{7$_a$}$$

ed in ogni punto d' una superficie terminale l' equazione

$$m_n=0\,. \tag{7$_b$}$$

L' equazione (7) caratterizza quella classe di distribuzioni polari che si dicono *solenoidali*; l' equazione (7)$_a$ esprime che la com-

ponente *normale* del momento polare è dovunque *continua* nell'interno dello spazio S; l'equazione $(7)_b$ esprime che questa stessa componente normale è nulla lungo tutte le superficie terminali, ossia che lungo queste superficie la polarizzazione è *tangenziale*.

Se dunque si pone il quesito: Quali sono le distribuzioni polari, in un dato spazio, a cui corrisponde la stessa distribuzione apolare che ad una polare data? è ovvia la risposta. Le distribuzioni cercate sono quelle, e solamente quelle che si ottengono dalla data sovrapponendo ad essa una qualunque delle distribuzioni polari (relative allo spazio dato) che hanno la funzione potenziale dovunque nulla.

§ 8. Dalle due forme (3), $(3)_a$ della funzione potenziale magnetica si deduce immediatamente, per noti teoremi,

$$(8) \quad \begin{cases} \Delta_2 V = -4\pi k = 4\pi \left(\frac{dm_x}{dx} + \frac{dm_y}{dy} + \frac{dm_z}{dz}\right), \\ \frac{dV}{dn} + \frac{dV}{dn'} = -4\pi h = 4\pi (m_n + m_{n'}), \end{cases}$$

equazioni di cui la prima sussiste in tutti i punti dello spazio e la seconda in tutti i punti d'ogni superficie di discontinuità, o terminale. Nella prima equazione si è scritto m_x, m_y, m_z in luogo di m_a, m_b, m_c, per indicare che i valori di queste componenti si riferiscono al punto qualunque (x, y, z) dello spazio infinito, e tali valori debbono ritenersi $= 0$ quando questo punto sia esterno allo spazio S, occupato dalla polarizzazione m di cui V è la funzione potenziale,

Ricordando le espressioni $(3)_b$ ed introducendo un nuovo vettore G, definito dalle tre componenti:

$$(8)_a \quad \begin{cases} G_x = F_x + 4\pi m_x, \\ G_y = F_y + 4\pi m_y, \\ G_z = F_z + 4\pi m_z, \end{cases}$$

le equazioni (8) prendono le forme seguenti:

$$(8)_b \quad \begin{cases} \frac{dG_x}{dx} + \frac{dG_y}{dy} + \frac{dG_z}{dz} = 0, \\ G_n + G_{n'} = 0, \end{cases}$$

nella seconda delle quali G_n e $G_{n'}$ sono le componenti di G secondo le direzioni n ed n' delle due opposte normali erette in uno stesso punto di σ, componenti calcolate coi valori che G_x, G_y, G_z prendono in ciascuna delle due regioni verso cui le due normali si dirigono. Queste due equazioni conducono a stabilire una proprietà importantissima del vettore G.

Sia S_1 uno spazio qualunque e σ_1 la superficie che lo limita. Dalla prima equazione (8)b segue

$$\int\left(\frac{dG_x}{dx}+\frac{dG_y}{dy}+\frac{dG_z}{dz}\right)dS_1=0$$

e di qui, in virtù della seconda equazione (8)b, la quale elimina l'influenza di quelle superficie, o porzioni di superficie σ, che eventualmente attraversassero lo spazio S_1,

$$(8)_c \qquad \int G_{n_1}\,d\sigma_1=0\,,$$

dove n_1 è la normale interna a σ_1. Considerando il vettore G come rappresentativo d'una *forza* ed adottando una locuzione ben nota, si ha dunque il teorema seguente: *Il flusso della forza* G, *attraverso una qualunque superficie chiusa, è sempre nullo.* È facile vedere che, reciprocamente, questa proprietà non può sussistere *incondizionatamente* (cioè qualunque sia la superficie chiusa) per una forza G, se le componenti di questa forza non soddisfanno alle equazioni (8)b.

La forza F (3)b non possiede mai, incondizionatamente, la proprietà in discorso, a meno che essa non sia nulla dovunque. Infatti se nelle equazioni (8)b si sostituiscono le espressioni (8)a dalle componente di G, si trova subito che quelle equazioni non sono soddisfatte dalle componenti di F se non quando i momenti polari soddisfanno alle equazioni (7), (7)a, (7)b del § 7, nel qual caso è nulla la funzione V ed è quindi nulla dovunque la forza F.

Ora la proprietà testè riconosciuta per il vettore G è precisamente quella che, ammettendo l'universale validità del noto teorema circa il flusso di forza che attraversa una superficie chiusa, dovrebbe competere alla forza emanante da una distri-

buzione dotata della proprietà che *ogni* superficie chiusa contenga una massa totale *nulla*; come appunto avviene (§ 4) per ogni distribuzione apolare equipollente ad una polare. È dunque naturale di assumere il vettore G come rappresentativo della *forza polare*, da contrapporsi in tal qual modo alla *forza apolare* F, colla quale essa non coincide che nello spazio vuoto.

La nuova forza G è quella stessa che Thomson distingue coll'appellativo di *elettromagnetica* e che Maxwell denomina invece *induzione magnetica*.

§ 9. È utile raccogliere e mettere fra loro a riscontro i diversi caratteri delle due forze F, G.

La forza polare G *soddisfa sempre alla condizione solenoidale; la forza apolare* F in generale *no*. Infatti per la prima forza sussiste sempre la prima equazione $(8)_b$, mentre per la seconda si ha (in virtù di $(3)_b$, oppure di $(8)_a$)

$$\frac{dF_x}{dx}+\frac{dF_y}{dy}+\frac{dF_z}{dz}=4\pi k\,.$$

La componente normale della forza polare G *si mantiene continua attraverso qualunque superficie di discontinuità, o terminale; quella della forza apolare* F in generale *no*. Infatti per la prima componente snssiste sempre la seconda equazione $(8)_b$, mentre per l'altra si ha (in virtù di $(3)_b$, oppure di $(8)_a$)

$$F_n+F_{n'}=4\pi h.$$

Ogni componente tangenziale della forza apolare F *si mantiene continua attraverso qualunque superficie di discontinuità, o terminale; ogni analoga componente della forza polare* G in generale *no*. La prima proprietà segue $(3)_{a,b}$ da ciò che V è funzione continua in tutto lo spazio; la seconda segue dalla prima e dalle relazioni $(8)_a$, le quali permettono anche di determinare la discontinuità d'ogni componente tangenziale della forza G.

Ogni tubo di forza polare è necessariamente interminato, vale a dire o rientra in sè stesso, o si perde all'infinito. Ciò segue immediatamente dall'equazione $(8)_c$, applicata ad un tubo di forza polare chiuso da due diaframmi; giacchè quest'equazione esprime l'assoluta costanza del flusso di forza polare lungo

tutto il tubo. Niuna analoga proprietà è incondizionatamente enunciabile rispetto ad un tubo di forza apolare, l'equazione corrispondente alla $(8)_c$ essendo per questa forza, in virtù di $(8)_{a,c}$,

$$\int F_{n_1}\, d\sigma_1 + 4\pi \int m_{n_1}\, d\sigma_1 = 0$$

ed il secondo termine di quest'equazione non potendo essere nullo incondizionatamente, se non quando sieno adempiute le condizioni specialissime del § 7, cioè quando sia dovunque $V = 0$ e quindi anche $F = 0$.

Si considerino ora due distribuzioni polari arbitrarie e sieno F_x, F_y, F_z le componenti della forza apolare F emanante dalla prima, G_x', G_y', G_z' quelle della forza polare G' emanante dalla seconda. Dall' identità

$$F_x G_x' = -\frac{dV}{dx} G_x' = V \frac{dG_x'}{dx} - \frac{d(VG_x')}{dx}$$

e dalle due analoghe si ricava, in virtù della prima equazione $(8)_b$, applicata alla seconda distribuzione,

$$F_xG_x' + F_yG_y' + F_zG_z' = -\left\{\frac{d(VG_x')}{dx} + \frac{d(VG_y')}{dy} + \frac{d(VG_z')}{dz}\right\},$$

equazione che sussiste in ogni punto dello spazio. Si ha poi, dalla seconda equazione $(8)_b$, in ogni punto d' una superficie di discontinuità σ', relativa alla seconda distribuzione,

$$V\,(G_n + G_{n'}) = 0.$$

Di qui si ricava subito

$$\int (F_xG_x' + F_yG_y' + F_zG_z')\, dS_\infty = \int VG_n'\, d\sigma_\infty,$$

cosicchè se in ogni direzione si verifica la convergenza

$$\lim\,(R^2\, VG_n') = 0 \quad \text{per} \quad R = \infty,$$

si ha

$$(9) \qquad \int (F_xG_x' + F_yG_y' + F_zG_z')\, dS_\infty = 0\,.$$

La condizione dianzi accennata è manifestamente soddisfatta quando amendue le distribuzioni polari sono tutte nel finito, ma

può sussistere, sotto certe restrizioni, che si riterranno di regola adempiute, anche quando l'una o l'altra od amendue invadano tutto lo spazio. Ciò ammesso, l'equazione (9) rappresenta un'importantissima proprietà di correlazione delle due forze F e G', la quale si può designare col nome di *ortogonalità integrale* delle due forze, polare ed apolare, relative a due distribuzioni in tre dimensioni del tutto arbitrarie ed indipendenti (che possono, naturalmente, coincidere anche in una sola [1]).

§ 10. Dall'equazione (9) si deduce molto facilmente un'altra importante formola ben nota, che si suole stabilire in altra guisa.

Sostituendo nell'equazione anzidetta le espressioni di G_x', G_y', G_z' desunte dalle tre equazioni analoghe alle $(8)_a$, si trova

$$\int(F_xF_x'+F_yF_y'+F_zF_z')dS_\infty+4\pi\int(F_a m_a'+F_b m_b'+F_c m_c')dS'=0,$$

dove S' è lo spazio occupato dalla seconda distribuzione. Quest'equazione si può scrivere $(3)_b$ sotto la forma

$$(10)\qquad \int\left(\frac{dV}{da}m_a'+\frac{dV}{db}m_b'+\frac{dV}{dc}m_c'\right)dS'=\frac{1}{4\pi}\int\Delta_1 VV'\,dS_\infty$$

e costituisce la formola cui si alludeva.

Questa formola può servire di verificazione alla già stabilita eguaglianza (6), bastando por mente alla forma simmetrica del suo secondo membro. Essa somministra, nel caso che le due distribuzioni non abbiano parti comuni, una nuova espressione del loro potenziale mutuo. Quando questa condizione non si verifica, il significato di potenziale mutuo non appartiene a ciascuna delle espressioni precedenti (come s'è già avvertito) se non *in senso apolare*, cioè con solo riguardo al magnetismo libero delle due distribuzioni.

Questa distinzione è essenziale ed è utile renderla esplicita mercè una segnatura speciale. Date dunque due distribuzioni polari *m, m'*, occupanti gli spazii S, S' arbitrariamente scelti, colle rispettive funzioni potenziali V, V', si designerà col sim-

1) Questo teorema si trova dimostrato, in forma ed estensione alcun poco diverse, in una Nota *Sulla teoria del potenziale*, equazione $(6)_c$ (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, per l'anno 1883).

bolo $\mathbf{P}(V,V')$ il loro *potenziale mutuo apolare*, cioè il potenziale mutuo dei rispettivi magnetismi liberi. Si avrà quindi [(6), (10)]:

$$(11) \quad \mathbf{P}(V,V') = \int\left(\frac{dV}{da}\,m_a' + \frac{dV}{db}\,m_b' + \frac{dV}{dc}\,m_c'\right) dS'$$
$$= \int\left(\frac{dV'}{da}\,m_a + \frac{dV'}{db}\,m_b + \frac{dV'}{dc}\,m_c\right) dS$$
$$= \int\frac{1}{4\pi}\,\Delta_1\,VV'.\,dS_\infty\,.$$

Si designerà invece col simbolo $P(V,V')$ il *potenziale mutuo polare* delle stesse due distribuzioni. L'espressione analitica di questo potenziale è per ora incognita: si può solo affermare che sussiste l'eguaglianza:

$$(11)_a \qquad P(V,V') = \mathbf{P}(V,V')$$

quando le due distribuzioni *non abbiano veruna parte in comune*.

Si denoterà parimente con $\mathbf{P}(V)$ l'*autopotenziale apolare* della distribuzione di funzione potenziale V, cioè il potenziale sovra sè stesso del magnetismo libero di questa distribuzione, e con $P(V)$ l'*autopotenziale polare* della medesima distribuzione. L'espressione di $\mathbf{P}(V)$, rispetto alla quale vale la regola

$$\mathbf{P}(V,V) = 2\mathbf{P}(V),$$

può subito darsi (11) nella doppia forma:

$$(12) \qquad \mathbf{P}(V) = \frac{1}{2}\int\left(\frac{dV}{da}m_a + \frac{dV}{db}m_b + \frac{dV}{dc}m_c\right) dS$$
$$= \frac{1}{8\pi}\int\Delta_1\,V.\,dS_\infty\,.$$

L'espressione analitica di $P(V)$ deve per ora considerarsi come incognita in ogni caso. Solo è da tenersi per fermo ch'essa non potrebbe assolutamente mai essere la stessa di quella di $\mathbf{P}(V)$, e ciò per una ragione altrettanto semplice quanto perentoria: ed è che ne risulterebbe $P(V) = 0$ per ognuna di quelle infinite distribuzioni polari (§ 7), la di cui funzione potenziale è dovunque nulla; mentre è manifesto che, fintantochè esiste una pola-

rità qualsiasi, deve potersi assegnare una quantità finita di energia potenziale, misurata dall'autopotenziale vero, o polare, ed equivalente al lavoro che ha dovuto essere speso per costituire lo spazio S in quello stato di polarità, che è condizione necessaria, quand' anche solo potenziale, di qualche efficienza magnetica [1]).

§ 11. Ora come può conseguirsi la determinazione del vero valore di P(V)? Una via che, a prima giunta, potrebbe parere conducente a questo fine, è la seguente.

Si concepisca diviso lo spazio S, occupato dalla distribuzione di funzione potenziale V, in parti $S_1, S_2, \ldots$ e sieno $V_1, V_2, \ldots$ le funzioni potenziali di queste singole parti. Il potenziale di tutto il corpo S, meno la parte S_i, su questa parte medesima, è espresso $(11)_a$ da

$$\mathbf{P}(V - V_i, V_i) = \mathbf{P}(V, V_i) - 2\mathbf{P}(V_i)$$

e la semisomma di tutti i potenziali mutui analoghi a questo è data da

$$P' = \frac{1}{2} \Sigma_i \mathbf{P}(V, V_i) - \Sigma_i \mathbf{P}(V_i),$$

ossia da

$$P' = \mathbf{P}(V) - \Sigma_i \mathbf{P}(V_i)$$

Se, aumentando indefinitamente il numero e diminuendo indefinitamente l'estensione delle parti S_i, in cui viene diviso lo spazio S, questa quantità P' tendesse verso un limite finito P,

1) Non è del tutto facile rilevare qual fosse il pensiero di Maxwell intorno a questa *vexata quœstio* dell'autopotenziale magnetico. Nell'art. 632 del *Treatise* (Ed. II), verrebbe indicata senza altro l'espressione **P**(V): ma nell' Art. 440 e nella Nota I al Cap. XI, Parte IV, è fatto cenno d' altre forme, per lo meno rispetto ai corpi indotti. Il *termine complementare quadratico* (veggasi il successivo § 12) era già stato aggiunto da Betti (*Teorica delle forze newtoniane*, 1879) in base a considerazioni istituite sugli elementi magnetici. Mercè considerazioni di simile natura, benchè di carattere più indeterminato, esso è stato pure introdotto ed usato nella citata mia Memoria del 1884. Lo stesso termine complementare si era già presentato, come conseguenza delle equazioni d' induzione nei corpi isotropi, a Von Helmholtz, nella Memoria del 1881 *Ueber die auf das Innere magnetisch oder dielektrisch polarisirten Körper wirkenden Kräfte* (formole 2_{fg}). In un recentissimo lavoro di C. Neumann (*Neue Sätze ueber das elektrostatische und ueber das magnetische Potential*, nei *Berichte* della Società Reale di Sassonia, 1890) è stabilita un' espressione $\mathfrak{U}$ dell' energia magnetica d' un sistema di corpi, nella quale comparisce un termine complementare di forma ancor più generale, e cioè nella forma corrispondente alla legge d' induzione nei corpi isotropi generalizzata da Kirchhoff (veggasi il successivo § 17).

indipendente dal modo di suddivisione, si potrebbe pensare che questo limite fosse per l'appunto la quantità cercata.

Senonchè la forma stessa dell'espressione di P' mostra subito che questo procedimento non può essere atto all'uopo. Infatti le singole quantità $\mathbf{P}(V_i)$ non possono mai essere, per loro natura, minori di zero, epperò P' non può mai risultare maggiore di $\mathbf{P}(V)$: ne consegue che l'obbiezione derivante dall'ipotesi $V = 0$ non viene punto eliminata, e può anzi venire aggravata dalla comparsa d'un risultato negativo. E, del resto, si può facilmente escogitare un caso in cui il processo conduce ad un valore nullo per P', senza che neppur sia nulla la funzione V. Il corpo S sia una sfera magnetizzata uniformemente e le parti $S_1, S_2, \ldots$ sieno gli involucri in cui questa sfera è divisa da superficie sferiche interne le une alle altre ed alla superficie sferica terminale. Il processo condurrebbe in questo caso a formare la semisomma dei potenziali mutui di tutte le coppie di involucri. Ora in ciascuna di queste coppie uno dei due involucri comprende l'altro nella sua cavità interna, ed è notissimo che, nella cavità d'un involucro sferico magnetizzato uniformemente, la funzione potenziale dell'involucro stesso è costante, donde consegue che il potenziale dell'involucro esterno sull'interno è nullo. Essendo nullo il potenziale mutuo di ciascuna coppia d'involucri, è nulla la semisomma P' di tutti questi potenziali e rimane sempre tale comunque si aumenti il numero e si diminuisca il volume degli involucri parziali. Coll'adottato metodo di suddivisione del corpo sferico si giungerebbe quindi ad una conclusione inammissibile: e ciò basta ad infirmare tutto il procedimento.

Ciò nondimeno giova proseguire nella facile indagine del valore generale dianzi simboleggiato per P', a cagione delle singolari deduzioni cui per tal modo si giunge.

Per semplicità si ponga l'espressione di $\mathbf{P}(V_i)$ sotto la forma [(1)a, (12)]

$$\mathbf{P}(V_i) = \frac{1}{2}\int \frac{dV_i}{ds}\, m\, dS_i ,$$

dove s è la direzione della polarizzazione m nel posto dell'elemento dS_i. Supponendo che gli spazii parziali S_i sieno già così piccoli da potersi in ciascun d'essi considerare, senza error sen-

sibile, il momento m come costante in grandezza e direzione, si può porre

$$V_i = - m_i \frac{dU_i}{ds_i}, \quad \text{dove} \quad U_i = \int \frac{dS_i}{r},$$

m_i ed s_i essendo la grandezza e la direzione del momento costante in S_i; epperò si ha

$$P(V_i) = - \frac{m_i^2}{2} \int \frac{d^2 U_i}{ds_i^2} dS_i,$$

ossia

$$P(V_i) = \frac{m_i^2}{2} \int \frac{dU_i}{ds_i} \cos(n_i, s_i)\, d\sigma,$$

dove n_i è la normale interna alla superficie σ_i, termine dello spazio S_i.

Si consideri ora una suddivisione *particolare* dello spazio S in ispazii parziali S_i; si attribuisca, cioè, a questi la forma di piccoli prismi, la di cui superficie laterale sia formata di linee di magnetizzazione e le di cui basi sieno normali a queste linee. In tal caso la precedente espressione si riduce a

$$P(V_i) = \frac{m_i^2}{2} \int \frac{dU_i}{dn_i} d\sigma_i',$$

dove σ_i' rappresenta l'insieme delle due basi. Sostituendo per U_i la sua espressione si ottiene successivamente

$$P(V_i) = \frac{m_i^2}{2} \int d\sigma_i' \int \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} dS_i$$

$$= \frac{m_i^2}{2} \int dS_i \int \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} d\sigma_i'$$

$$= \frac{m_i^2}{2} \int (\sigma_i')_{dS_i}\, dS_i,$$

dove il simbolo scritto sotto l'ultimo integrale rappresenta l'angolo visuale della superficie σ_i' rispetto ad un punto dell'elemento di volume dS_i. Ciò posto, se la sezione del prisma infinitamente piccolo S_i diventa evanescente di fronte all'altezza di

esso, il detto angolo visuale non ha un valore finito se non per elementi dS_i situati nell' immediata prossimità delle basi, epperò l' integrale

$$\int (\sigma_i')_{dS_i}\, dS_i$$

ha col volume S_i un rapporto evanescente. Se, invece, l' altezza del prisma diventa evanescente di fronte alla sezione, il medesimo angolo visuale non differisce sensibilmente da 4π se non nell'immediata prossimità della superficie laterale, epperò si ha

$$\lim \mathbf{P}(V_i) = 2\pi\, m_i^2\, S_i\,.$$

Nel primo caso si ottiene dunque

$$\lim P' = \mathbf{P}(V)$$

e, nel secondo,

$$\lim P' = \mathbf{P}(V) - 2\pi \int m^2\, dS\,.$$

Questi risultati assumono una forma più esplicita se si osserva che dalle equazioni $(8)_2$, poste sotto la forma

$$G_x - F_x = 2\pi\, m_x, \quad \text{ecc.}$$

si deduce, quadrando e sommando,

$$F^2 + G^2 - 2\,(F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z) = 16\,\pi^2\, m^2\;,$$

e di qui, integrando su tutto lo spazio, con riguardo all' equazione (9),

$$(13) \qquad \frac{1}{8\pi}\int F^2\, dS_\infty + \frac{1}{8\pi}\int G^2\, dS_\infty = 2\pi \int m^2\, dS\,.$$

I limiti trovati per P' nei due casi testè considerati si possono pertanto rappresentare così:

$$1^o \text{ caso} \qquad \lim P' = + \frac{1}{8\pi}\int F^2\, dS_\infty\,,$$

$$2^o \text{ caso} \qquad \lim P' = - \frac{1}{8\pi}\int G^2\, dS_\infty\,.$$

Questi risultati mettono in evidenza l' assoluta inaccettabilità del procedimento indicato, giacchè questo nè conduce ad un

limite unico e determinato, nè rimove la possibilità di valori nulli per P(V), che anzi rende possibili valori negativi di questa stessa quantità.

(Continua).

FENOMENI CHE PRESENTA IL RAME IMMERSO IN SOLUZIONI DEL SUO SOLFATO E DURANTE L'ELETTROLISI DI QUESTO SALE; SUNTO DI RICERCHE FATTE DAL DOTT. FILIPPO CINTOLESI [1]).

1° Negli annali dei RR. Istituti tecnico e nautico di Livorno, Vol. IX serie 2ª, l'autore espone in una lunga memoria uno studio minuzioso intorno all'indicato argomento prendendo le mosse dal seguente fatto da lui osservato. Se sopra una lamina di platino deponesi mediante elettrolisi di una soluzione di solfato cuprico, uno straterello di rame puro, e si lascia immersa o nella soluzione elettrolizzata od in altra del medesimo sale, lo strato metallico deposto si discioglie.

Servendosi di lamine di platino rivestite di rame puro elettrolitico, ovvero di lamine di rame ottenuto per la stessa via, immerse in soluzioni più o meno concentrate di solfato chimicamente puro, l'autore studia l'influenza dell'aria nel fenomeno in parola.

Sperimentò prima soluzioni bollite a lungo e raffreddate nella macchina pneumatica, collocandolo nel vuoto di pochi millimetri affine di escludere ogni traccia d'aria: poi soluzioni aereate con corrente d'aria o naturalmente: vidi privando l'aria d'anidride carbonica, e finalmente escludendo l'aria saturando di anidride ed in un'atmosfera di questo gas.

I resultati medj di una serie estesa e continuata in varie epoche dell'anno sono riassunti nel seguente quadro.

	Decrem. per 1' in microgr.
Lamina e soluzione nel vuoto . . .	0,2354
» » » in corrente d'aria .	0,8805
» » » con aereazione naturale	0,7691
» » » senza CO_2 . .	0,8546
» » » in CO_2 . . .	0,2479

1) Sunto dell'Autore.

Da questi risultati l'autore deduce le seguenti conclusioni:

1° *che nel vuoto e nell'anidride carbonica il decremento è quasi nullo, e tale sarebbe forse da ritenersi ove si potesse sicuramente sopprimere l'intervento di traccie di ossigeno.*

2° *che l'ossigeno dell'aria è da ritenersi quale causa determinante nella dissoluzione del rame nelle soluzioni del suo solfato.*

S'intende, che il consumo è sempre riferito alla stessa superficie.

2° L'autore passa dipoi a studiare un fatto, che fu già rilevato da Jacobi, Becquerel ed altri sperimentatori, che, cioè, durante l'elettrolisi del solfato di rame operata con lamine di questo metallo, il decremento dell'anode supera l'incremento del catode.

Il metodo sperimentale adoperato comporta una grande sensibilità. All'estremità di uno dei bracci d'una bilancia sensibile fino ad $^1/_{20}$ di mmgr. sospende un filo di rame piegato a forma di T rovesciato.

Alle estremità del braccio orizzontale salda due sottilissimi fili di platino, ai quali raccomanda due laminette di platino una ramata e l'altra no. Sommerse le lamine in due bicchieri distinti contenenti la stessa soluzione di solfato puro, ordinariamente satura, dispone un circuito dall'uno all'altro bicchiere in modo che la corrente passi per le lamine e pel braccio a cui sono sospese, curando che l'accesso abbia sempre luogo per una lamina ramata. Talvolta sostituisce alle lamine sospese due spirali.

Fa parte del circuito un reometro accuratamente graduato.

Avendo osservato che per correnti di un paio o tre Daniell mezzane, deponevasi al disotto dell'anode della polvere sottile di rame metallico. Adoperò, l'autore, correnti non maggiori di 0,144 Amp. e durate non oltrepassanti i 77'.

Da tali ricerche fu condotto alle seguenti conclusioni:

1ª *che allorquando si opera l'elettrolisi d'una soluzione di solfato di rame, adoperando correnti non molto forti e durate di tempo non grandi, è senz'alcun dubbio manifesto il fatto che il consumo dell'anode non eguaglia l'aumento in peso del catode, come teoricamente dovrebb'essere, ma è invece maggiore.*

2ª *che la sulubilità dell' anode resulta maggiore in confronto all' accrescimento del catode, quando invece di lamine si adoperino fili.*

3ª *che tale consumo riesce sensibilmente proporzionale alla durata dell' esperienza.*

Volendo trovare un'altra prova in appoggio ai resultati sopraesposti, adoperando soluzioni di non perfetta saturazione ne determinò il peso specifico prima e dopo l' esperimento fatto colle lamine di rame ed elettrolizzando, ottenendo i seguenti resultati.

Num. d'ord. dell'esper.	Densità della soluz. non elettrolizzata	Densità della soluz. dopo elettrolizzata.
1ª Con sfera di vetro sommª.	1,1564	1,1593
2ª » »	1,1614	1,1635
3ª Colla boccetta . . .	1,1195	1,12416

3. Tutto il suesposto costituisce la prima parte della memoria. Nella seconda parte l' autore comincia dallo studiare l'azione dissolvente esercitata sul rame da soluzioni *d' acido solforico,* sia nel vuoto, sia in presenza d' aria. Ciò per mettersi in grado di rispondere a coloro i quali credevano, o credono, trovare la causa del fenomeno in parola nell' acidità della soluzione del solfato, attribuita alla esistenza di traccie d' acido solforico libero.

Le tre soluzioni adoperate erano al 50, al 5 ed al 10 per 100.

Le conclusioni di queste ricerche sono le seguenti:

1ª *che in presenza dell' aria la lamina di rame elettrolitico subisce un leggiero decremento, il quale, per pari superficie e durata, diminuisce col decrescere della quantità d' acido solforico libero.*

Così, mentre per la soluzione al 50 % e per 1' è di microgr. 0,7, per quella al 5 % e per 1', è di circa microgr, 0,493, quando le soluzioni sono nell' aria: di gran lunga minore a questo è quello nel vuoto sebbene la soluzione sperimentata fosse al 10 %.

2ª *che fuori del contatto dell'aria la diminuzione di peso, e perciò la quantità di rame disciolto, è ancora più piccola,*

tanto da riuscire inferiore quasi a quello ottenuta nel solfato di rame pure messo nel vuoto.

Basta per persuadersene notare che, ridotto il consumo alla stessa superficie, si ha per la soluzione di acido solforico al 5 °/₀ e nell' aria circa 0,7 microgr. per 1'; per quella dello stesso acido al 10 °/₀, ma nel vuoto, 0,172 microgr. per minuto; ed infine per la soluzione di solfato di rame, nel vuoto, circa 0,2354 microg. per lo stesso tempo.

4. Allo scopo di stabilire l'azione dell' ossigeno sul rame, l' autore studia, come si comporti detto metallo. nell' *acqua ossigenata* in presenza di un acido oppur no.

I fatti raccolti sono abbastanza nuovi ed importanti, nonchè, fino ad un certo punto, imprevisti: essi possono essere riassunti come segue.

Una lamina di rame elettrolitico, immersa in $H_2 O_2$ con presenza anche di piccole quantità d' acidi *fosforico* o *solforico* si discioglie rapidamente per dare origine ad un sale *rameoso*, il quale persiste, se continua la presenza dell' acqua ossigenata, altrimenti si trasforma in *rameico*.

La dissoluzione cresce coll' aumentare della quantità di acqua ossigenata.

Ecco tre resultati comparativi, i quali dimostrano la differenza di decremento a partire da una soluzione di $H_2 SO_4$ senza $H_2 O_2$.

Titolo della soluzione	Decrem. per 1' e per la stessa sup. in microgr.
Soluz. d'$H_2 SO_4$ al 5°/₀	0,70
» » » con 10 cm³ per 100 d'H_2O_2	22,67
» » » con 200 » » »	172,20

Nei due primi casi i saggi chimici indicano la formazione di un sale rameico e l' assenza d' acqua ossigenata e nel terzo invece di un sale rameoso e presenza di biossido d' idrogeno.

Mescolando acqua ossigenata con una soluzione di solfato cuprico, nella proporzione di ¹/₁₀ del volume totale, al fine di meglio stabilire la relazione tra questi fatti e la dissoluzione del rame nelle ricerche esposte al paragr. 1, e dopo avere osservato uno sviluppo gassoso nell' atto del mescolare, l' autore vi

immerse una solita lamina ramata. Il liquido lasciato in riposo per una *ventina d' ore* divenne torbo, con deposito in fondo del vaso, di colore non più azzurro ma verdastro; e la lamina mostrossi corrosa ed annerita.

Colla filtrazione il liquido, ridivenuto limpido, riacquistò il suo colore azzurro: il filtrato era una polvere gialla.

L'analisi chimica provò: che la polvere era ossidulo idrato di rame, e che nella soluzione era scomparsa l'acqua ossigenata.

Da tutto ciò l'autore deduce:

1° *che il rame, nell'acqua ossigenata, subisce un'ossidazione la quale, anzichè, come si sarebbe inclinati a credere, produrre un composto rameico, dà origine ad un ossido rameoso idratantesi, il quale rimane in questo stato nella soluzione di solfato rameico, mentre passa allo stato di sale al minimo in presenza di acidi liberi, com' è resultato dalle precedenti esperienze.*

2° *che cessata l'esistenza dell' acqua ossigenata, cessa pure la trasformazione del rame in ossidulo dello stesso metallo.*

Si noti, e ciò è interessante, che la reazione del solfato, in cui era sospeso l'ossidulo, era sempre acida, ma che aggiungendovi una gocciolina d'acido solforico l'ossidulo spariva subito, disciogliendosi.

Anzi l'autore ha provato, che ciò accade anche con traccie d'acido, per cui si serve di cotesto idrato rameoso all'oggetto di stabilire la presenza di acido solforico libero, e di argomento per combattere l'opinione che il solfato di rame, di zinco ed altri dieno alla carta reazione acida non per una proprietà specifica loro pertinente, ma per la presenza di traccie d'acido libero.

5. L'autore spinge le sue ricerche anche allo studio dei fenomeni che manifestansi nella elettrolisi, con lamine di rame, di una soluzione di solfato al 25 °/₀ con aggiunta di 20 cm^3 d'H_2O_2 a 100 cm^3 di soluzione.

Tali sperimenti conducono ai seguenti resultati:

L'anode si consuma rapidamente, e sul catode non si depone che una polvere nerastra con qualche granello di rame metallico il liquido è torbo per sospensione di abbondante ossidulo idrato.

Il saggio della mescolanza non elettrolizzata, la quale aveva mostrato il fenomeno dello sviluppo gassoso sopraricordato, dimostrò che il solfato rameico in presenza di acqua ossigenata era passato a rameoso, fenomeno abbastanza singolare.

In una porzione di liquido, lasciata in disparte, tale stato perseverò per molti giorni. Nella soluzione elettrolizzata, così ricca d' ossido rameoso, non esisteva più acqua ossigenata e la densità fu trovata un po' diminuita.

6. Nell' H_2O_2 perfettamente pura il rame si ossida formando ossidulo idrato, che persiste fino a che evvi presenza di detto corpo.

La fine della seconda parte del lavoro riferisce le reazioni ottenute con ossidulo rameoso in presenza di acido solforico e sali a reazione acida.

L'acido solforico allungato di molta acqua scioglie l' ossidulo formando sale rameico e rame libero sotto forma pulverulenta e rosso, fenomeno questo già noto.

Eguale resultato è stato ottenuto aggiungendo alcune goccie di soluzione acida al 5 °/₀ ad una soluzione di solfato di rame con entro sospeso dell' ossidulo. In ogni caso la reazione restò sempre acida.

Lo stesso fenomeno accade quando l' ossidulo è sospeso in una soluzione di solfato di zinco.

Sospeso dell' ossidulo nell' acqua, separato in due porzioni il liquido, ed aggiunta alla prima una soluzione rameica elettrolizzata con lamine di rame, ed alla seconda una soluzione pure elettrolizzata ma con lamine di platino, nel primo caso l' ossidulo rimase intatto, nel secondo si disciolse.

Reazioni sempre acide.

7. Nella terza parte del suo lavoro l' autore tenta di trovare la spiegazione dei fatti osservati, e di esprimere le reazioni mediante equazioni chimiche.

La solubilità del rame nel suo solfato verrebbe spiegata dalle seguenti reazioni.

1ª. Ossidazione del rame per mezzo dell' ossigeno dell'aria e formazione di idrato rameoso:

$$(1) \qquad 2Cu + O + H_2O = Cu_2(OH)_2 ,$$

oppure, dietro le osservazioni di Traube:

(2) $$2Cu + H_2O_2 = Cu_2(OH)_2 .$$

2ª Modificazione del sale cuprico:

(3) $$Cu_2(OH)_2 + 2CuSO_4 = 2Cu_2SO_4 + H_2O_2 .$$

3ª Reazione dell'acqua ossigenata sopra il solfato rameico:

(4) $$2CuSO_4 + H_2O_2 = Cu_2SO_4 + H_2SO_4 + 2O ,$$

o con sviluppo d'ossigeno e produzione conseguente di ossido rameico, il quale, in presenza d'acido solforico darebbe

(5) $$Cu(OH)_2 + H_2SO_4 = CuSO_4 + 2H_2O :$$

Siccome l'acido è in difetto rispetto all'ossigeno, così l'ossido cuprico si anderebbe accumulando sulla lamina, che si annerirebbe come si vede di fatto. Si otterrebbe così un miscuglio di sale rameico e rameoso, il quale ultimo in presenza d'aria e rame potrebbe decomporsi a lungo andare in rameico ed ossidulo, come si può prevedere colla seguente equazione:

(6) $$Cu_2SO_4 + Cu + O + H_2O = CuSO_4 + Cu_2(OH)_2 .$$

L'autore lasciando immersa per una ventina di giorni una foglia di rame elettrolitico nella soluzione concentrata di solfato, constatò la formazione dell'ossidulo prevista dalla (6).

Per quanto riguarda i fenomeni osservati immergendo una lamina di rame in un miscuglio di solfato ed acqua ossigenata, l'autore crede di dover distinguere due differenti reazioni, le quali concorrono al resultato finale.

All'atto del miscuglio si constata uno sviluppo gassoso, che avviene mentre il solfato rameico si trasforma in rameoso, come dimostra l'equazione (4).

Essendo tutto il solfato al massimo trasformato al minimo, si ha ora il caso di una lamina di rame sommersa in una soluzione di quest'ultimo sale in presenza d'acido solforico libero e di acqua ossigenata.

L' azione del primo sarebbe espressa dall' equazione:

$$(7) \qquad Cu_2\,SO_4 + Cu + H_2O_2 = CuSO_4 + Cu_2\,(OH)_2$$

e quella del secondo da:

$$(8) \qquad H_2SO_4 + Cu + H_2O_2 = CuSO_4 + 2H_2O\,.$$

Per conseguenza il resultato finale sarebbe la distrazione di acqua ossigenata e formazione di ossidulo.

L' equazione (8) viene anche condotta in altro modo dall'autore, e precisamente passando per l' acido persolforico, del quale è assai probabile la formazione: oppure viene suddivisa nelle due fasi espresse dalle seguenti equazioni:

$$(9) \qquad 2Cu + H_2O_2 = Cu_2\,(OH)_2$$

$$(10) \qquad Cu_2(OH)_2 + H_2O_2 + 2H_2SO_4 = 2CuSO_4 + 4H_2O\,.$$

E siccome questa reazione potrebbe far nascere il dubbio di una contradizione con la già nota:

$$(11) \qquad Cu_2\,(OH)_2 + H_2SO_4 = CuSO_4 + Cu + 2H_2O\,;$$

l' autore ha verificato direttamente che in presenza di biossido di idrogeno si manifesta sempre il resultato della (10).

Per spiegare poi i fenomeni che si osservano nell' elettrolisi, rispetto al consumo, superiore al teorico, dell' anode, l' autore crede, che la serie dei fatti constatati sperimentalmente e sopraesposti non sia contraria a fare ammettere che nella ossidazione dell' anode si formi, o in totale o parzialmente, dell'ossido rameoso per il quale occorre un atomo di rame di più che pel rameico. Ma in tale caso l' acido solforico prodotto dalla decomposizione del solfato soggetto all' elettrolisi, troverebbesi a reagire con ossidulo, e secondo la (11) si dovrebbe manifestare la presenza di rame libero. Ora è precisamente, secondo l' autore, cotesto il rame in istato di sottil polvere che si raccoglie in fondo al voltametro in corrispondenza dell' anode.

Tutto il suesposto non è che un breve riassunto del lavoro dell' Autore.

SULLA RESISTENZA ELETTRICA DI ALCUNI METALLI AL PUNTO DI FUSIONE; STUDIO SPERIMENTALE DEL DOTTOR GIUSEPPE VASSURA.

Nell'anno 1855 il Matteucci [1]) studiando l'influenza del calore sulle proprietà elettriche del Bismuto spinse le sue indagini sino a temperature superiori a quella di fusione e per primo misurò la conducibilità elettrica di quel metallo allo stato liquido.

Due anni dopo il Mathiessen [2]) instituendo ricerche analoghe sopra il gruppo dei metalli Alcalini ed Alcalino-terrosi sottopose il Sodio ed il Potassio a tutte le temperature comprese fra 0° e 120° e trovò che la resistenza elettrica dei due metalli subisce un forte aumento all'atto della fusione, anzi un aumento quasi della stessa grandezza per entrambi i metalli, ma che mentre nel Sodio avviene repentinamente alla temperatura di 95°6 nel Potassio è più lento e prende diversi gradi della scala termometrica intorno al punto di fusione.

Dopo il Mathiessen il Siemens [3]) determinò la resistenza dello Stagno liquido nell'anno 1861 e solo nel 1863 una più ricca messe di risultati ci viene data dal Lucien de la Rive [4]) con l'applicazione che egli fece ai metalli fusi del metodo di Thomson per la misura delle resistenze elettriche. Le sue determinazioni si estendono ai metalli Stagno, Bismuto, Zinco, Piombo, Cadmio, Antimonio, e sono riferite alla resistenza del Mercurio a 21°. Egli fuse i metalli in tubi di porcellana di Bayeux e riscaldandoli coi vapori di Mercurio e di Cadmio bollenti potè raggiungere temperature al di sopra degli 800 gradi. Ma ciò che vi ha di più pregevole nelle esperienze del de la Rive è l'uso del metodo di Thomson, col quale restano eliminate le resistenze di contatto fra i reofori ed il metallo che si studia.

1) Matteucci, *N. Cimento* S. I, Vol. I.
2) Mathiessen, *Poggendorff's Annalen* Bd. C.
3) W. Siemens, " " Bd. CXIII.
4) Lucien de la Rive, *Comptes Rendus*. Vol. LVII.

Dai lavori citati pertanto risulta che in generale la resistenza elettrica subisce una forte variazione all'istante in cui avviene il cambiamento di stato d'aggregazione. E tale fatto fu confermato da Weber [1]) per le leghe di Stagno col Bismuto e col Piombo, per le quali osservò che quel rapido aumento incomincia alla *prima fusione* e continua durante tutto il processo complicato della fusione della lega presentando delle oscillazioni e dei massimi e dei minimi a seconda della qualità e del rapporto fra i componenti la lega.

La questione era rimasta a questo punto quando lo scorso anno è apparsa alla luce una estesa memoria dei Sigg. Professori Vicentini ed Omodei [2]), nella quale sono accuratamente descritte le ricerche che essi han fatto sul modo di variare della resistenza elettrica da 0° fino a temperature superiori a quella di fusione dei metalli: Stagno, Bismuto, Tallio, Cadmio e Piombo. Il metodo di misura adoperato è quello suggerito da Kohlrausch per le piccole resistenze indipendentemente dalle resistenze di contatto e con l'uso del galvanometro differenziale. Le resistenze dei tubetti capillari ripieni coi diversi metalli sono riferite a quelle dei tubi stessi ripieni di mercurio, per lo che precede le esperienze in discorso uno studio della resistenza del mercurio da 0° sino a 350°, fatta confrontando la resistenza elettrica di un tubo pieno di mercurio alle diverse temperature con la resistenza del tubo stesso a 0° ma senza tener conto della dilatazione dei tubi per effetto del calore. Inoltre i Sigg. Professori Vicentini ed Omodei non si sono occupati abbastanza delle impurità che i metalli sui quali hanno sperimentato potrebbero contenere.

È nota la legge del Mathiessen secondo la quale la conducibilità di una lega è media fra le conducibilità dei metalli componenti, cioè si ha: $K = \frac{vk + v'k'}{v + v'}$ in cui K è la conducibilità della lega di peso specifico $D = \frac{vd + v'd'}{v + v'}$, v e v' i volumi molecolari, K e K' le conducibilità, d e d' i pesi specifici dei com-

1) Weber, *Wiedemann Annalen*, Band. 34.
2) Vicentini ed Omodei, *R. Acc. dei Fisiocritici*, S. V, Vol. II.

ponenti. Quando però la quantità relativa di uno dei metalli è così piccola da non essere più confrontabile con quella dell'altro, l'effetto del componente in minima quantità è in generale di molto ingrandito e la conducibilità risultante di molto alterata. Così il Rame ed il Mercurio hanno resistenze molto diverse quando contengono piccole impurità, e sulla resistenza del Bismuto fanno sentire la loro influenza le minime traccie di Arsenico e di Piombo come hanno dimostrato il Righi [1]) ed il van Aubel [2]).

Quest'ultimo anzi avendo provato alla stregua dell'analisi spettrali come i migliori processi chimici non gli fornissero del Bismuto libero assolutamente da piombo, lo ottenne per via elettrolitica ed ebbe ad osservare che la resistenza elettrica del metallo era accresciuta per la presenza di una quantità di piombo così piccola che non si rintracciava coi metodi della chimica analitica e appena con quelli della spettroscopia.

Per questo mi sono servito dei metalli più puri che fornisce la Casa Tromsdorff di Erfurt, ed ho voluto prima di sottoporli alle esperienze procurarmi mediante l'analisi spettrale esatta conoscenza del grado di loro purezza.

Ricerche spettrali.

Lo spettroscopio che avevo a disposizione era un semplice Brewster, costruito dal Duboscq, un istrumento a piccola dispersione. Ma in compenso poteva produrre la luce molto intensamente facendo scoccare fra pezzetti del metallo da analizzare le forti scintille e ben nutrite di un rocchetto di induzione Ruhmkorff capace di darne della lunghezza di 45 cm. Esso era eccitato da quattro coppie Bunsen, ed era montata in derivazione sui torchietti una bottiglia di Leyda di grandi dimensioni, cosicchè le scintille, che sarebbero scoccate senza interruzione a 5 o 6 cm., davano per una distanza non maggiore di un millimetro una luce intensissima e fissa. Basta avvicinare l'occhio all'oculare dello spettroscopio per farsi un'idea della efficacia

1) Righi, *N. Cimento*, vol. XVIII, 1885.
2) Van Aubel, *Annales de Chimie et de Physique*, VI s., T. 18, 1889.

di tale procedimento: le righe dovute al metallo di cui si compongono le punte dello spinterometro sono tutte brillanti e registrabili sino a quelle di minore importanza, e quelle dovute all'aria si riducono a poche, tre o quattro, che è facile conoscere con la pratica.

Ma, data la poca dispersione del prisma, affinchè non avessi a rimanere in dubbio su qualche riga di minore entità come quella che più mi interessava, trattandosi solo di assicurarmi della purezza di metalli già preparati puri coi migliori processi chimici, ho avuto cura di produrre ciascun spettro anche in un ambiente di idrogeno, e almeno una volta di fare l'osservazione con una lente convergente avanti alla fenditura dello spettroscopio come Lokyer consiglia. Con quest'ultima disposizione più che la luce diffusa, si osserva decomposta la luce emanante da ciascuna regione della scintilla. Le righe metalliche più importanti continuano ad attraversare lo spettro per tutta la sua altezza, ma le secondarie sono accorciate ed hanno l'aspetto di punte di spilli; anzi la loro lunghezza relativa è ancora un criterio per decidere della loro importanza. È noto come su questo fatto sia fondato il metodo di analisi quantitativa delle leghe di Lokyer [1]).

Il gas idrogeno ho preparato con la reazione dell'acido solforico sullo zinco, depurandolo due volte attraverso il permanganato di potassa e disseccandolo successivamente con acido solforico puro ed anidride fosforica. Inoltre quest'idrogeno prima di entrare nel palloncino di vetro ove scoccavano le scintille passava attraverso della lana di vetro destinata a trattenerne il pulviscolo; senza questa ultima precauzione nello spettro dell'idrogeno appariva a fugaci intervalli la riga gialla del sodio, mentre così operando essa rimaneva eliminata in modo assoluto.

Venuto a queste condizioni di esperimento della sufficienza delle quali mi sono convinto in tutte le prove preliminari, non restava che a graduare lo strumento per la riduzione in lunghezza d'onda delle divisioni del micrometro. Mi sono servito dei seguenti dati:

1) Lokyer, *Studi di Analisi spettrale.*

	D	λ
K	69,2	768,0
Li	82,6	670,6
H	85,5	656,2
Li	94,8	610,2
Na	100	589,2
Az	105,5	567,8
Tl	116,4	534,9
Az	130,0	500,3
H	136,5	486,1
Sr	150,4	460,7
Ca	178,5	422,6
K	195,0	404,5
Ca	203,0	396,3
Ca	206,5	393,3

I numeri della colonna D indicano la divisione del micrometro corrispondente alla lunghezza d'onda λ espressa in milionesimi di millimetro. Questi dati ho scelto in maggior numero verso la regione centrale dello spettro, perchè in questa sono più frequenti le righe degli spettri dei metalli che dovevo analizzare; ed ho fatta l'interpolazione mediante una curva. Ho poi fatto uso in modo particolare delle tavole degli spettri dei metalli di Thalen [1], e dell'atlante di Lecoq de Boisbaudran [2], non chè di altri libri e manuali di spettroscopia quali quelli di Vogel [3] e di Salet [4], ecc.

Esporrò per intero come saggio l'analisi fatta sullo stagno. Due erano i campioni di stagno mandati da Tromsdorff uno in grani l'altro in bacchette ma della analisi di quest' ultimo soltanto mi sono occupato, avendolo trovato dopo alcune prove più puro del primo. Fatte scoccare le scintille elettriche fra pezzetti di fili di questo stagno, ottenuti per fusione, tanto in

1) Thalen, *Ann. de Chimie et de Physique*, IV, T. XVIII, p. 202.
2) Lecoq de Boisbaudran, *Spéctres lumineux.*
3) Vogel, *Praktische spectranalyse.*
4) Salet, *Traité de spectroscopie.*

un ambiente di idrogeno che nell' aria, ho registrato le seguenti righe oltre quelle del gas ambiente:

D	λ'		Annotazioni	Spettro dello Stagno (Thalen) λ	
80,5	686,0	1			
87,5	645,0	1		645,2	1
93 — 94	618 — 614		fascie larghe, deboli e diffuse.		
95 — 97	610 — 602				
102,5	580,0	1		579,8	1
106,0	568,0	1		568,0	2
108,5	559,0	1		558,8	1
109,4	556,0	1		556,2	1
116,0	536,5		deboli.	536,8	5
116,8	534,5			534,7	4
117,2	533,0	2		533,2	2
119,0	528,5		molto deboli.	528,9	5
121,0	522,5			522,4	4
126,0	510,0			510,0	3
129,0	502,0			502,1	5
133,5	492,5	-	debole.	492,3	4
137,0	485,5	2		485,8	3
152,5	458,0	2		458,4	2
156,0	452,0	1		452,4	1

D è la lettura fatta sul micrometro, λ' la sua traduzione in micromillimetri secondo la curva di graduazione; nella colonna annotazioni ho segnato 1 le righe più brillanti. È evidente la corrispondenza collo spettro dello stagno riportato nell' ultima colonna; rimangono a spiegare la riga brillante $\lambda = 686$ e le fascie sfumate fra i limiti 618 — 614 e 610 — 602. Essendosi esse mostrate tanto nell' idrogeno che nell' aria non possono derivare da impurità trascinate da quello nella sua preparazione. Della qual cosa del resto mi ero assicurato a suo tempo studiando lo spettro dell' idrogeno che fu sempre purissimo; avendo cura di osservare in modo speciale se non si mostrassero le righe del fluore e del fosforo, o anche dell' idrogeno fosforato che dà uno spettro come fu studiato da Salet [1]). Del fluore perchè lo zinco impuro che reagiva coll' acido a svolgere idrogeno potrebbe contenerne essendochè nella metallurgia si adopera il

1) Salet, *Ann. de Chimie et de Physique*, Janvier 1873.

fluoruro di calcio come fondente; del fosforo perchè la sua anidride serviva ad essicare il gas.

Per le dette righe osservate nello spettro dello stagno l'uso della lente avanti alla fenditura dello spettroscopio ha ancora provato che si debbono al metallo. La riga 686 trova corrispondenza nella più intensa dello spettro del fluore.

Quanto alle due fascie non trovo alcun chè che vi corrisponda dallo spoglio delle tavole; e neanche è probabile che sieno dovute a qualche composto che si formi fra lo stagno e l'idrogeno. Liveing e Dewar [1]) hanno infatti dimostrato che ciò può avvenire per qualche metallo ed hanno anche accertato il fatto per il magnesio, ma le due fascie in discorso le ho osservate ugualmente e nell'idrogeno e nell'aria.

Avendo per un momento sospettato che questo stagno contenesse piombo ho fatto scoccare la scintilla fra un polo di stagno e uno di piombo usando la lente, ma nè alcuna riga comune, all'infuori di quella del fluore, nè alcuna reciproca modificazione fra i due spettri mi venne dato di scorgere; prova di nessuna comunanza di composizione. Questo metodo di confronto suggerito da Lokyer è mezzo efficacissimo e l'ho seguito tutte le volte che ho avuto motivo per sospettare un componente comune fra due metalli.

Il fluore l'ho rintracciato anche nel bismuto, nel cadmio e nell'antimonio.

Nell'analisi del bismuto ho osservato in modo palese le righe di lunghezza d'onda: 560; 554,6; 537 che appartengono allo spettro del piombo, poi la 589 del sodio, ma debole e non così persistente come van Aubel [2]) dice di averla trovata nell'analisi che egli ha fatta dello stesso bismuto di Tromsdorff. Infine ho registrato le due righe dello spettro del rame di lunghezza d'onda 570 e 510,5. Le righe più intense e caratteristiche del rame, come le due 521,7 e 515,3 sono in una regione ove abbondano e sono brillanti e diffuse le righe dello stesso bismuto, esse venivano ecclissate rispettivamente dalla 520,8 e dalla 514,4 come è apparso chiaro da una prova di confronto.

1) Liveing e Dewar, *Proceedings of. the Royal Society.*
2) Van Aubel, *loco cit.*

Nell' antimonio non ho trovato che il fluore.

Dello zinco avevo due campioni uno segnato « purissimo » l'altro « chimicamente purissimo e libero da arsenico ». Il primo sottoposto all' analisi ha mostrato che oltre a molte impurità contiene dello stagno; il secondo entro i limiti dei mezzi d' analisi da me adoperati è puro.

Il cadmio contiene fluore, come si è già detto, ed inoltre il suo spettro è solcato nella regione violetta da una riga brillante e persistente accompagnata da un' altra di minore intensità. Le loro posizioni sono:

D	λ'	Spettro del Glucinio
163	457 !!!	457,2 !!!
168	449	448,8

Come si vede esse potrebbero essere tutto lo spettro del Glucinio. Non esiste nella regione violetta altra possibile corrispondenza.

Misura delle resistenze elettriche.

Per assoggettare i metalli alla misura della loro resistenza elettrica li ho fusi entro tubi di vetro capillari ad U terminati alle estremità da cannelli del diametro di più che un centimetro. Nella fig. 3 della Tav. I ove è disegnata una sezione dell' apparecchio di riscaldamento, è pure rappresentato in α α' uno di tali tubi. Le estremità allargate α α' servono alla immersione dei reofori per stabilire il passaggio della corrente.

Volendo poi determinare per ciascun metallo la resistenza elettrica specifica in unità elettromagnetiche assolute del sistema C. G. S. a 0 gradi e alla temperatura di fusione, cioè la resistenza che alla medesima temperatura offrirebbe al passaggio della corrente un cubo della sostanza di un cm. di lato, quando le superfici di due faccie opposte fossero superfici equipotenziali, e non essendo possibile il determinarla con un processo di calibrazione in causa della forma irregolare dei tubi, l'ho dedotta

per confronto con quella del mercurio. Ho riempito anzitutto ciascun tubo con del mercurio e ne ho misurata la resistenza a 0° quel valore che Kohlrausch chiama *capacità di resistenza* a 0°, e che indicheremo con C_0, poi l'identica operazione ho fatta con ciascun metallo; la resistenza R_0 in ohms del tubo pieno del metallo che si vuol studiare, divisa per la capacità di resistenza C_0 del tubo, moltiplicata per $94,34.10^3$ che è la resistenza specifica del mercurio a 0° in unità assolute dà appunto il numero che si cerca

$$(1) \qquad K_0 = 94,34.10^3 \frac{R_0}{C_0}$$

La cosa è ovvia finchè si esperimenta alla temperatura di 0°, ma per le temperature superiori, in causa della dilatazione termica dei tubi, la formula è insufficiente. Conviene correggere il valore della resistenza R in ohms ottenuta ad una certa temperatura e ridurlo ad essere tale quale si sarebbe ottenuto se non fosse avvenuta per il riscaldamento variazione nella capacità volumetrica dei tubi capillari.

Se il vano di un tubetto capillare non ha per essere cilindrico una sezione circolare costante e tanto meno un asse rettilineo, in via d'approssimazione però lo si può intendere decomposto in tanti cilindretti soddisfacenti a quelle condizioni. Sieno l_1 l_2 l_3..... le lunghezze, s_1 s_2 s_3..... le sezioni ed r_1 r_2 r_3..... le resistenze in ohms dei medesimi alla temperatura t.

$$R = r_1 + r_2 + r_3 \ldots\ldots = \Sigma r .$$

Sia K la resistenza specifica a t della sostanza che riempie il tubo. Poichè a ciascuno dei cilindretti elementari è applicabile la legge $r = K \frac{l}{s}$, si avrà

$$R = K \frac{l}{s} + K \frac{l_2}{s_2} + \ldots\ldots = K\Sigma \frac{l}{s} .$$

La lunghezza l intanto è uguale a l_0 $(1 + \alpha t)$, e la sezione $s = s_0$ $(1 + \alpha t)^2$ se α è il coefficiente di dilatazione lineare medio fra 0 e t, del vetro dei tubi, quindi

$$R = K\Sigma \frac{l_0}{s_0(1+\alpha t)} = \frac{K}{1+\alpha t} \Sigma \frac{l_0}{s_0} \tag{2}$$

e per $t = 0$

$$R_0 = K_0 \Sigma \frac{l_0}{s_0}.$$

$\Sigma \frac{l_0}{s_0}$ è una costante dipendente dal tubo; confrontando poi quest' ultima ottenuta con la prima (1) si vede che

$$\Sigma \frac{l_0}{s_0} = \frac{C_0}{94340}$$

laonde sostituendone il valore nella (2) e ricavando K si ha

$$K = 94,\, 34.10^3 \frac{R}{C_0} (1+\alpha t) \tag{3}$$

Questa è la formola che ha servito al calcolo delle esperienze. Quanto al valore di α, che entra nel solo termine di correzione non ho creduto di calcolarlo particolarmente per il vetro dei miei tubi, e mi sono servito del valore medio fra 0° e 350° dato dal Regnault per il vetro ordinario

$$\alpha = 0.0000\,10\,44.$$

Non intendo con questo di menomare l' importanza della correzione medesima. Soltanto per lo stagno, che ha temperatura di fusione più bassa $\tau = 226.5$, il fattore $1+\alpha t$ della formola (3) ha alla temperatura stessa il valore 1,00236 e apporta correzione a K per due o tre millesimi del suo valore.

I reofori immersi nel metallo liquido dei tubi o rimasti in esso confitti quando è ridiventato solido potrebbero avere resistenza non trascurabile rispetto a quella del filo capillare del metallo che si studia, di più stabilire al contatto una resistenza di passaggio.

Per eliminare l' una e l' altra causa di errore nella misura delle resistenze ho ricorso al metodo del ponte di Thomson, rappresentata schematicamente nella fig. 1; r è la resistenza nota che si contrappone alla incognita x, E una pila, G un galvanometro. È noto che in quella rete di circuiti quando non vi ha corrente nel ramo MN fra le resistenze dei diversi bracci esiste la relazione

$$\frac{r}{d} - \frac{x}{c} + \left(\frac{b}{d} - \frac{a}{c}\right) \frac{l}{a+b+c} = 0$$

e si ha

$$\frac{r}{d} = \frac{x}{c}$$

se il terzo termine è uguale a zero: per il che basta che sia nullo uno dei fattori che lo compongono, che si abbia cioè:

$$\frac{b}{d} = \frac{a}{c}\ ; \quad \text{oppure} \quad \frac{l}{a+b+l} = 0$$

o almeno piccolissimo.

Stando così le cose le resistenze dei contatti A, B, P, Q si sommano rispettivamente con le a, c, b, d le quali si possono costruire così grandi che quelle al loro confronto sieno trascurabili.

Il metodo come si vede porta con sè la necessità di immergere in ciascun ramo del tubo due reofori. Questi ho fatti con grossi fili di ferro che non sono intaccati dal mercurio.

Le quattro resistenze a, c, b, d ho costruito di circa 5 Ohms ciascuna e perfettamente uguali fra di loro; e il tutto ho tradotto in pratica con la disposizione che si vede nella fig. 2 in cui le lettere sono le stesse che nella fig. 1. Sopra un robusto zoccolo di legno di noce lungo circa un metro sono situate ad una estremità le quattro resistenze a, b, c, d e lungo il resto si stende il filo r che fa da reocordo. A, B, C, D sono quattro provette di porcellana molto profonde e ripiene di mercurio, esse ricevono i reofori provenienti dal tubo che contiene il metallo di cui si vuole la resistenza. Come queste sono le S e T a cui fan capo le estremità del filo del reocordo, mentre M ed N son due serrafili fra cui è inserito il galvanometro. La pila usata è compo-

sta di due elementi Daniel come quella che trovai sempre la più conveniente e che montavo con cura tutte le volte mi accingevo a far delle misure. Il reoforo della pila mette in C e T e comprende un interruttore a molla. Fra D ed S è la piccola resistenza *l* variabile a piacimento.

Le resistenze *a*, *b*, *c*, *d* sono di filo sottile, di lega platinoide che è poco sensibile ai mutamenti della temperatura, doppiamente ricoperto di seta e ravvolto su rocchetti di legno prima che le resistenze stesse venissero misurate. I capi del filo di ciascuna di queste resistenze sono saldati a bastoncini di rame, e i rocchetti son fermi sul sostegno nelle posizioni che si veggono nella fig. 2. Delle quattro la *b* e la *d* hanno ciascuna ad una estremità un' appendice di filo di rame che si prolunga fino ai corsoi P e Q. Questo filo di rame è di media grossezza, è lungo e flessibile da permettere il movimento dei corsoi in tutte le posizioni sul reocordo. Di questo tratto di filo che si aggiunge alla *b* e alla *d* si tenne conto nella loro misura e anzi servì a renderne più esatta la uguaglianza con la *a* e la *c* rispettivamente. Furono le quattro resistenze fatte uguali circa a 5 Ohms e misurate con un ponte di Wheatstone ed un sensibilissimo galvanometro Thomson, operando col metodo della tara. Gli apparecchi erano ottimi, forniti dalla Casa Elliot, e consentivano l'approssimazione del centomillesimo di Ohm.

I tasti P e Q sono di piombo, del peso di un kgm. ciascuno, appoggiano sul filo del reocordo per mezzo di un coltello di ottone che termina al disopra in un serrafilo destinato a ricevere le estremità delle resistenze *b* e *d*. Ha servito per le esperienze un galvanometro Deprez d'Arsonval ultimo modello, fornito dal Carpentier, con scala a riflessione alla distanza di circa un metro.

Il filo del reocordo è di argentana, scelto con cura, ha poco più di un millimetro di diametro; è lungo circa m. 1,80 piegato ad ansa; ha le due estremità saldate a grosse lamine di rame che son fermate e pescano nelle provette S e T. È poi al gomito dell'ansa tenuto teso da una vite di pressione. Sotto il filo è incollata sul legno della carta millimetrata. È evidente che usando l'apparecchio, così descritto la resistenza che si oppone alla incognita è quella del tratto di filo compreso fra i due corsoi P e Q. Si può però fare uso di un solo corsoio e stabilire lo

zero del reocordo, togliendo l'estremità del filo *d* dal corsoio Q e immergendola nella provetta T.

Prima cura è stata quella di assicurarmi della omogeneità del filo, per farne in caso una calibrazione. A tal fine ho stabilita comunicazione fra le provette C ed A; e B e D con ponticelli di grosso filo di rame amalgamato, come del resto erano tutti i fili immersi nel mercurio, e fra le due provette A e B ho inserita una resistenza qualunque ma piccola e costante. Questa equilibravo nell'altro lato del ponte con tratti del filo del reocordo spostando i tasti nelle diverse regioni.

In tal modo la calibrazione è analoga a quella del tubo capillare di un termometro nel quale si faccia scorrere una colonnina di mercurio. Ripetuta l'operazione variando la resistenza fra A e B non ho trovato sensibili differenze, come si vede da una delle serie che qui riporto:

posizione del tasto Q	posizione del tasto P	lunghezza di filo inserita mm.
(0)	137	137
46	183	137
76	212,8	136,8
100	236,8	136,8
200	337	137
300	437	137
400	537	137
500	636,6	136,6

Nella quale serie lo zero è stato dedotto e si trova nelle vicinanze della provetta T.

Non mi sono servito che di uno dei tratti rettilinei del reocordo, quello dalla parte della provetta T, la resistenza del quale è poco più di $^1/_{10}$ di Ohm. Ma le resistenze dei tubi che avevo da misurare essendo in generale maggiori di $^1/_{10}$ e minori di un Ohm, ho ricorso a resistenze ausiliarie, e per tali mi hanno servito i sei rocchetti di un reostato Siemens segnati:

1 1 0,5 0,2 0,2 0,1

che indico rispettivamente con le notazioni

X' X V II' II I

e dei quali ho determinato il valore, confrontandoli con un Ohm campione di argentana munito di termometro per le correzioni della temperatura.

Per inserire il reostato nell'apparecchio basta togliere dal tasto Q il filo *d* dalla provetta T il reoforo della pila e stringere le estremità di entrambi sotto uno dei morsetti del reostato, mentre l'altro per mezzo di una grossa lamina di rame si fa comunicare con la provetta T. Allora la resistenza che si oppone all'incognita è quella che si legge sul reostato più quella del tratto di filo compreso fra la provetta T ed il corsoio P.

Indicando con ρ la resistenza in Ohms di un millimetro di filo del reocordo risulta dai confronti che:

$$\rho = 0{,}00013$$
$$I = 0{,}09573$$
$$II = II = 0{,}18898$$
$$V = 0{,}46949$$
$$X = 0{,}94275$$
$$X' = 0{,}94301$$

L'apparecchio di riscaldamento, di cui è rappresentata una sezione nella figura 3 in scala di circa $^1/_6$, è un comune bagno di petrolio. Un recipiente cilindrico di rame A, profondo 40 cm. è contenuto in un altro B parimenti cilindrico ed entrambi sono pieni dell' olio minerale.

Questo era stato ottenuto mediante una distillazione frazionata e non bolliva a 400°. L'apparecchio è posato sulla graticola di un fornello in mattoni refrattari, sotto il quale brucia una grossa lampada di 15 becchi Bunsen. Il gas che alimenta la lampada viene da due robinetti che fan capo a due diversi contatori, così non solo è meglio garantita la costanza dell' efflusso ma la manovra combinata dei due robinetti permette di apportare variazioni abbastanza piccole alla fiamma.

Il bagno interno A è continuamente rimescolato da un co-

mune agitatore mosso da un motore a peso il cui movimento è mantenuto uniforme da un moderatore ad alette.

Sempre nell' intento di ottenere delle temperature costanti tutto l' apparecchio è circondato da uno schermo C di latta. Il tubo che si vuol riscaldare è infisso mediante le sue estremità più grosse $\alpha\alpha'$ in un grosso tappo di sovero M portato da un anello di ferro che per un braccio con morsetta a vite si fissa e si sposta lungo la asta verticale di un comune sostegno di ferro. Il tubo abbassandosi così verticalmente al disopra dell'apparecchio, entra in un foro centrale del coperchio del recipiente A, fino a che il tappo appoggiandosi sul coperchio stesso, chiude il recipiente, ed è impedita con la circolazione dell' aria l' accensione del petrolio. Per la stessa ragione il recipiente B è chiuso e non ha che un tubetto di sfogo *b*.

Il tappo M porta nel suo centro fra le branchie $\alpha\alpha'$ del tubo il termometro T destinato a segnare la temperatura del bagno.

Due sono i termometri a mercurio dei quali ho fatto particolarmente uso, entrambi con scala divisa in gradi centesimali l' uno da 0° a 360°, l' altro da 0 a 450°. Di questi ho determinato più volte durante le esperienze i punti fissi 0 e 100 per calcolare in gradi centesimali il valore di ciascuna divisione della scala.

Ho evitata la correzione della colonna sporgente nell' aria avendo cura di tener continuamente infisso il termometro nel tappo fino all' estremo superiore della colonna di mercurio.

Il momento della fusione o della solidificazione del metallo che riempie un tubo è accusato da una fortissima variazione della resistenza elettrica, per cui si può osservando gli strumenti elettrici determinare la temperatura di fusione.

Avendo così operato non ho trovato sensibili differenze coi punti di fusione che con apposite ricerche i Proff. Vicentini ed Omodei hanno determinato per gli stessi prodotti Tromsdorff

	τ
Sn	226°,5
B	271°
Cd	318°

Questo controllo ho ritenuto sufficiente per l'approssimazione nella misura delle temperature.

La disposizione degli apparecchi si completa coi reofori che a due a due si immergono nelle parti allargate α α' del tubo, e che vanno per grossissimi fili di rame a comunicare con le provette A, B, C, D del reocordo.

Le prime determinazioni di resistenza fatte son quelle della capacità C_0 dei tubi, cioè della loro resistenza in Ohm a 0° quando non pieni di mercurio.

I tubi disponibili erano 8 di quattro diversi diametri, e quelli dello stesso diametro di diversa lunghezza. La loro pulitura ho fatta con acido nitrico a caldo poi con acqua distillata asciugandoli infine con aria dissecata sull' acido solforico, e che facevo passare attraverso ai tubi per mezzo dell' aspirazione di una pompa. Siffatta pulitura ho ripetuta tutte le volte che un tubo, in qualunque modo usato, doveva essere adoperato di nuovo. Il riempimento dei tubi col mercurio ho fatto in modo che questo si elevi fino a 4 e 5 cm. nelle parti allargate, e facendo bollire il mercurio con una lampada a gas.

Ho usato due qualità di mercurio, l' una mandata come purissima e distillata da Tromsdorff, l' altra preparata da me con mercurio da laboratorio, che ho distillato nel vuoto dopo lunga epurazione sotto l' acido nitrico.

Ciascun tubo ho riempito successivamente con le due qualità, ne ho determinata la resistenza a zero gradi e come si vede dalla tabella che segue non ho trovati valori sensibilmente differenti. La media di questi due valori ho presa per C_0. Per fare queste misure a zero gradi il tubo veniva posto non più nell'apparecchio testè descritto ma in un pozzo di ghiaccio triturato come si usa per la determinazione del punto 0° dei termometri. I reofori consistenti in grossi fili di ferro venivano applicati mediante tappi di sovero nelle parti allargate dei tubi dopo essere stati bruniti con carta a fino smeriglio, e venivano immersi fino a un centimetro circa dall' origine della parte capillare dei tubi stessi.

Tubo N.	Hg. Tromsdorff R_0	Hg. distillato[1] R_0	Media C_0
1	0,28905	0,28869	0,28887
2	0,31949	0,31961	0,31955
3	0,17942	0,17960	0,17951
4	0,15450	0,15500	0,15475
5	0,45030	0,44992	0,45011
6	0,51317	0,51265	0,51291
7	0,30800	0,30900	0,30850
8	0,40142	0,40172	0,40157

Per le ricerche alle quali ora mi accingevo, si presenta un primo problema di pratica manualità, ed è il riempimento dei tubi capillari coi metalli per fusione. Due in particolar modo sono gli inconvenienti ai quali si va incontro: l'ossidazione del metallo quando fonde, e le bollicine d'aria che possono rimanere aderenti alle pareti del tubo. Entrambe queste cause possono se non impedire almeno alterare la nettezza e la continuità del filo metallico che si forma nel tubetto capillare, ma ho evitato l'una e l'altra facendo la fusione ed il riempimento nel vuoto. Pulito e preparato un tubo e posto nell' apparecchio riscaldante come si vede nella fig. 3, vi ho introdotto in una delle espansioni α una quantità sufficiente di pezzetti di metallo, ben scelti e lavati, poi con due tappi di gomma o di sovero, che son riuscito a farne a perfetta tenuta, attraversati da due tubetti $\beta\beta'$ di vetro ho chiuso le espansioni $\alpha\alpha'$. I due tubetti $\beta\beta'$ per mezzo di congiunture di gomma sono uniti alle braccia di un altro tubo di vetro che ha forma di Y, e la gamba del quale lunga più di un metro va a comunicare direttamente con la macchina pneumatica. Questa è a mercurio del tipo Bessel-Hagen, con valvole a mercurio e senza robinetti. Sulla via per la quale la camera barometrica comunica col recipiente nel quale si fa il vuoto è inserito un palloncino contenente anidride fosforica, così il vuoto è secco.

Disposte così le cose e fatto il vuoto a meno di un millimetro spingevo il riscaldamento in modo lento ed uniforme fin

sopra la temperatura di fusione del metallo introdotto nella espansione α. Questo allora fondendo fluiva per il tubo capillare fino a raggiungere lo stesso livello nella parte α', come si poteva vedere sollevando per un momento il tappo M dall' apparecchio. In tal maniera il metallo, se se ne toglie una leggiera colorazione superficiale dalla parte α ove è avvenuta la fusione, non si ossida e riempie in modo perfetto il tubo capillare. Posso dire di avere sempre ottenuto, operando in tale maniera, dei bellissimi getti con la superficie nitida e a riflesso speculare.

La quantità di metallo introdotto era tale che una volta fuso si elevasse nei cannelli $\alpha\alpha'$ fino a 3, o 4 cm. di altezza. Ottenuto con la fusione il riempimento, toglievo i tappi con i tubetti $\beta\beta'$ e vi sostituivo gli altri portanti i reofori. Come quando il tubo era pieno di mercurio spingevo i reofori fino a un cm. circa dalla parte capillare del tubo. Il quale è subito in condizione per servire alla determinazione della resistenza elettrica del metallo allo stato liquido ed alle temperature che si vuole.

Abbassando poi lentamente la temperatura, il metallo solidifica e se questo si fa molto lentamente e senza interrompere l' agitazione del bagno avviene sempre di ottenere nell' interno del tubo un filo metallico solido senza soluzioni qualsiansi di continuità. I reofori rimangono infissi nella massa solida e servono ancora per la comunicazione della corrente. Il tubo, quando le cose abbiano proceduto regolarmente, si presta allora alla determinazione della resistenza elettrica del metallo solido.

Con tutto ciò l' operazione del riempimento dei tubi è sempre molto delicata e non pochi furono i tentativi e le esperienze andate perdute.

Non riferirò che sopra le determinazioni che ebbero esito con certa garanzia, e che ebbi tempo di condurre a termine. Esse si riferiscono ai metalli, Stagno, Bismuto e Cadmio.

Stagno.

Tre sono i tubi scelti di diversa capacità e riempiti di stagno fuso col metodo descritto. Di tutti ho potuto determinare la resistenza elettrica R in Ohms ad alcune temperature tanto superiori che inferiori a quella di fusione $\tau = 226,5°$ ed a $0°$. Quest' ultima determinazione ho fatta per vederne l'accordo coi valori della resistenza che già si conoscono. I valori della resistenza elettrica specifica K li ho calcolati con la formola dedotta in principio

$$K = 94340 (1 + \alpha t) \frac{R}{C_0}$$

Il coefficiente: $94340 (1 + \alpha t)$ che non varia da tubo a tubo, dipende dalle unità scelte e contiene la correzione relativa alla dilatazione volumetrica dei tubi per effetto del riscaldamento. Esso è funzione lineare della temperatura t, e rappresentandolo graficamente con una retta si rende molto più spedito il calcolo.

Se poi, per un dato tubo ripieno di metallo e assoggettato alle esperienze, si fa una costruzione grafica prendendo per ascisse le temperature T e per ordinate i valori della resistenza elettrica specifica K, si trova che tanto allo stato liquido quanto allo stato solido la linea disegnata si riduce ad una retta. Queste due rette rappresentano l'andamento di K, e prolungate fino ad incontrare l'ordinata di ascissa τ ci danno i valori della resistenza elettrica specifica alla temperatura di fusione tanto allo stato liquido che allo stato solido, valori che indicheremo con K^l_τ e K^s_τ rispettivamente. Questo modo di operare, seguìto anche dai signori Vicentini ed Omodei implica l'ipotesi che la K nel suo modo di variare continui a comportarsi fin nelle vicinanze del punto di fusione come a qualche diecina di gradi di distanza.

Senza dubbio l'errore a cui si va incontro, come giustamente osservano i sigg. Vicentini ed Omodei, non può essere grande essendo i punti della curva che si costruiscono corrispondenti a temperature molto vicine a τ; ma importa specificare il signifi-

cato della cosa. Anzitutto intorno alla temperatura di fusione la resistenza elettrica ha tutti i valori compresi fra K^{l}_{T} e K^{s}_{T}, e questi ne sono il limite massimo e minimo. Inoltre a temperature molto vicine a quella di fusione la resistenza incomincia a variare tanto rapidamente che per quanto si cerchi di tenere costante la temperatura non è facile fare delle determinazioni concordanti. Col ponte da me usato le determinazioni della resistenza si facevano assai rapidamente e si potevano seguire in modo quasi continuo le variazioni della resistenza stessa, così che ho potuto constatare in modo sicuro che la forte variazione che subisce la resistenza elettrica dello stagno per il fatto della fusione incomincia prima e finisce dopo che il termometro segni 226,5°.

In conseguenza di ciò la linea rappresentante graficamente il fenomeno non sarebbe più una spezzata, ma una linea fatta di 3 tratti rettilinei raccordati da due archi di curva. E questo risultato non è di lieve importanza, esso toglie qualunque discontinuità al fenomeno.

Questo che dico per lo stagno debbo ripetere tanto per il bismuto che per il cadmio.

Nelle tabelle che seguono sono registrati i risultati ottenuti sullo stagno coi tubi N. 2, 4 e 5. I numeri fra parentesi sono quelli dedotti nel modo ora detto.

Tubo N. 2 — $C_0 = 0,31955$

T	R	K : 1000
259	0,16385	48,504
251,4	0,16335	48,352
240,5	0,16203	47,956
230	0,16093	47,626
τ		(47,53)
τ		(22,65)
221	0,07540	22.311
216,2	0,07346	21,737
200	0,06968	20,614
0	0,03510	10,362

TUBO N. 4 — C_0 = 0,15475		
T	R	K : 1000
245	0,07943	48,546
240.3	0.07904	48,305
233,4	0,07878	48.143
τ		(47,83)
τ		(22.39)
220.2	0,03562	21.765
215,8	0,03462	21.153
203	0,03276	19.976
0	0,01199	9,753

TUBO N. 5 — C_0 = 0,45011		
T	R	K : 1000
255	0,23146	48.643
238.2	0.22925	48.168
231,5	0,22787	47.876
τ		(47,79)
τ		(21.80)
219.6	0.10083	21.134
207.3	0.09561	20.083
196,4	0.09129	19.172
0	0,04729	9,913

Facendo le medie dei valori di K alla temperatura di fusione τ e a 0° abbiamo i valori più probabili:

$$K^{1}_{\tau} = 47{,}38 \qquad K^{2}_{\tau} = 22{,}28 \qquad K_0 = 10{,}009\,.$$

Dai loro rapporti

$$\frac{K^{1}_{\tau}}{K^{2}_{\tau}} = 2{,}126 \qquad \frac{K^{2}_{\tau}}{K_0} = 2{,}225$$

si vede che la resistenza elettrica specifica dello stagno cresce con la temperatura fino a divenire a 226,5° più che il doppio di

quello che era a 0°, poi per il fatto della fusione alla stessa temperatura aumenta di quasi altrettanto. E sulle tabelle si legge ancora che questo crescere della resistenza con la temperatura continua allo stato liquido.

Bismuto.

Oltre alle speciali proprietà ben note di questo metallo e alle tante anomalie della sua resistenza elettrica che muta per ogni più piccola differenza di natura chimica o di stato fisico, il bismuto presenta una particolare difficoltà alla misura della sua resistenza elettrica in causa del suo grande potere termoelettrico rispetto agli altri metalli in genere ed in ispecie al ferro di cui eran fatti i reofori del mio apparecchio.

Se si fa passare la corrente di una pila in un circuito, in cui sia inserita una sbarretta di bismuto, per qualche istante, poi si elimina dal circuito la pila e vi si sostituisce un reometro questo accusa una corrente diretta nel senso opposto a quello secondo cui era diretta la corrente della pila. È una corrente termoelettrica dovuta al diverso calore che per l' effetto Peltier si sviluppa alle estremità della sbarra di bismuto quando vi passa la corrente della pila. Un tale fatto si verificava nei miei apparecchi. Il passaggio della corrente per quanto debole, ingenerava nel tubo contenente il bismuto una forza termoelettrica in senso inverso, la quale alla rottura del circuito della pila produceva una corrente come accennava il galvanometro, e mentre il circuito della pila era chiuso si manifestava come un accrescimento della resistenza elettrica del bismuto del tubo. Ho resa trascurabile questa causa di errore non lasciando chiuso, nel fare le determinazioni al ponte, il circuito della pila che un istante brevissimo per mezzo dell' interruttore a molla.

Il primo tubo che ho riempito di bismuto è il N. 4 già adoperato per lo stagno ma sempre in ottime condizioni, poi i tubi N. 1 e N. 3.

Do nelle seguenti tabelle i risultati ottenuti in modo analogo a quanto ho fatto per lo stagno, solo che le temperature sono più alte.

Tubo N. 4 — $C_0 = 0,15475$		
T	R	K : 1000
292,3	0,20354	124,462
284,5	0,20666	126,360
275	0,20692	126,507
τ		(127,50)
τ		(267,20)
254,2	0,43204	263,951
245,8	0,43438	265,358
237,5	0,43074	263,110
0	0,21080	128,510

Tubo N. 1 — $C_0 = 0,28887$		
T	R	K : 1000
295	0,38157	125,00
282,5	0,38345	125,60
276	0,38999	127,73
τ		(128,00)
τ		(280,90)
266	0,88069	288,42
258,2	0,87842	287,65
249	0,87356	286,03
0	0,39720	129,72

Tubo N. 3 — $C_0 = 0,17951$		
T	R	K : 1000
284	0,24213	127,63
278	0,24332	128,25
τ		(128,60)
τ		(276,40)
267	0,52394	276,12
261	0,52238	275,28
252	0,52121	274,64

Facendo le solite medie dei valori di K dedotti per la temperatura $\tau = 271^\circ$ si ha

$$K^l_\tau = 128,03 \qquad K^s_\tau = 274,50 \qquad K_0 = 129,11$$

e i rapporti:

$$\frac{K^l_\tau}{K^s_\tau} = 0,466 \qquad \frac{K^s_\tau}{K_0} = 2,126 .$$

Come per lo stagno la resistenza elettrica del bismuto cresce con la temperatura, ma al punto di fusione subisce una forte diminuzione, e si riduce a meno che metà di quello che era alla stessa temperatura ma allo stato solido.

È notevole l'accordo fra le tre determinazioni di K^l_τ; esse sono

127,50
128,00
128,60

mentre è evidente la discordanza fra quelle di K^s_τ che sono

267,2
280,9
276,4

Non bisogna dimenticare che il bismuto solidificando aumenta di volume, a differenza dello stagno, e che dà ciò, mentre trova probabilmente ragione il modo inverso di comportarsi della sua resistenza elettrica che diminuisce per il cambiamento di stato a differenza di quella dello stagno, certo dipende il suo assetto molecolare quando solidifica entro un tubetto a pareti grosse e resistenti. L'alto valore di K^s_τ si deve senza dubbio in parte alla compressione alla quale il bismuto si assoggetta da sè solidificando entro il tubo capillare; compressione il cui meccanismo dipende da tutte le condizioni circostanti e deve essere certamente troppo complesso per presentare dei caratteri costanti.

Cadmio.

Non vi sono speciali considerazioni relativamente al cadmio; valgono per esso quelle fatte di indole generale. Due soltanto sono i tubi adoperati: il N. 7 e il N. 6. La temperatura di fusione del cadmio è 318°, quindi il riscaldamento ho dovuto spingere fin oltre i 350°.

Nelle seguenti tabelle sono esposti i risultati nel solito modo

Tubo N. 7 — $C_0 = 0,30850$		
T	R	K : 1000
350	0,11445	35,126
340	0,11497	35,282
τ		(35,56)
τ		(18,20)
316,2	0,05863	17,988
310	0,05642	17,309
0	0,02117	6,475

Tubo N. 6 — $C_0 = 0,51291$		
T	R	K : 1000
357	0,18082	33,382
338,5	0,18203	33,600
326,8	0,18343	33,854
τ		(33,94)
τ		(16,96)
315	0,09023	16,650
311,5	0,08931	16,480
306,4	0,08632	15,929
0	0,03655	6,723

Medie: $K^l_\tau = 34,75$ $K^s_\tau = 17,58$ $K_0 = 6,599$

$$\frac{K^l_\tau}{K^s_\tau} = 1,976 \qquad \frac{K^s_\tau}{K_0} = 2,664 .$$

La resistenza elettrica specifica del Cadmio solido nelle vicinanze della temperatura di fusione aumenta al crescere della temperatura analogamente allo Stagno ed al Bismuto; aumenta ancora repentinamente per il fatto della fusione come per lo Stagno e a differenza del Bismuto; diminuisce poi al crescere della temperatura nello stato liquido a differenza di entrambi i precedenti.

Risultati generali.

La resistenza elettrica dei metalli studiati subisce una forte variazione per il cambiamento di stato d'aggregazione, e già accennammo parlando dello Stagno ad una fisonomia di continuità che sembra possedere il fenomeno.

Invero la più piccola quantità di materia che si può fondere sarà pure una quantità finita, e per essere fusa abbisognerà di una quantità finita di lavoro equivalente ad un certo numero di calorie. Ora di mano in mano che queste calorie di fusione vengono somministrate alla sostanza essa passerà per una serie di stadii intermedii fra quello solido e quello liquido; la sua resistenza elettrica intanto insieme alle altre proprietà fisiche viene alterata e varia fra i due valori K^s_τ e K^l_τ che ci è dato conoscere, fra questi due valori ve ne ha una serie pei quali passerà corrispondentemente agli stadii intermedii in cui deve trovarsi la sostanza prima di essere liquida. Durante la fusione la temperatura rimane costante ma questa più che una proprietà della materia è, come la pressione, una condizione per la quale il fenomeno è possibile. La resistenza elettrica non è adunque più funzione della temperatura, ma durante la fusione altri elementi si trovano in conflitto ed in particolar modo le forze di coesione; con queste probabilmente è in relazione la resistenza elettrica. I numeri K^s_τ e K^l_τ sono il massimo e minimo valore di K alla temperatura τ; e per il modo col quale si sono calcolati non possono essere che approssimati.

Dalle ricerche spettrali si è messo in evidenza che nessuno dei metalli studiati è assolutamente puro; il Bismuto in ispecie contiene una ragguardevole quantità di Piombo. La determinazione della resistenza elettrica ha confermato l'analisi chimica,

poichè il Van Aubel (loco cit.) ha evidentemente dimostrato che la resistenza specifica a 0° del Bismuto puro non può superare 108,000 unità C. G. S., mentre noi abbiamo ottenuto 129110. E la correzione relativa da apportarsi ai nostri risultati non si può calcolare che in seguito ad uno studio completo della resistenza elettrica delle leghe di Bismuto con le sostanze che esso contiene come impurità, e che coi processi chimici non si possono separare.

Altrettanto si dica per gli altri metalli. I risultati così corretti sarebbero più prossimi alla verità.

Le determinazioni allo stato solido possono essere affette da altri errori ancora, dipendenti dalla variabilità delle condizioni con cui un metallo solidifica entro un tubo capillare.

Con tutto ciò i nostri risultati non sono molto differenti da quelli ottenuti dai Professori Vicentini ed Omodei i risultati dei quali si avvicinerebbero alla media di quelli ottenuti da tutti i precedenti esperimentatori.

Nella seguente tabella i risultati dei Professori Vicentini ed Omodei sono espressi in unità E M assolute C. G. S., e segnati a destra dei nostri nelle colonne colla intestazione V e O.

	Stagno		**Bismuto**		**Cadmio**	
		V e O		V e O		V e O
K^l_T	47,38	47,80	128,03	128,20	34,75	33,52
K^s_T	22.28	21,63	274,50	284,89	17,58	17,10
K_0	10,01	10,34	129,11	133,13	6,60	6,89
K^l_T/K^s_T	2,12	2,21	0,46	0,45	1,97	1,96
K^s_T/K_0	2,22	2,09	2,12	2,14	2,66	2,48

Come si vede le maggiori divergenze fra le due serie di risultati si hanno pel Bismuto ed esse sono nel senso di portare a credere che il Bismuto adoperato dai Proff. Vicentini ed Omodei fosse anche meno puro di quello da noi sperimentato, ad ogni modo non potendosi per ora disporre di risultati ottenuti con metalli che presentino sufficiente garanzia di purezza non ci sembra anche si possano dedurre delle conclusioni generali sopra relazioni fra queste proprietà dei metalli e le altre.

Quanto alla legge che i Professori Vicentini ed Omodei enunciano riguardo alla relazione fra la resistenza elettrica dei metalli liquidi alla temperatura di fusione ed il peso atomico, non ci sembra molto evidente. Basta perciò sulla tabella stessa degli Autori [1]) confrontare i numeri relativi al Cadmio ed allo Stagno, al Tallio ed al Piombo, allo Zinco ed al Cadmio, al Piombo ed al Bismuto.

La pretesa nostra non può nel momento attuale oltrepassare quella di aver messe anche meglio in evidenza le difficoltà di uno studio della resistenza elettrica dei metalli in rapporto al fenomeno della fusione.

Per quanto modesto sia il presente lavoro, io lo debbo alla cortesia del Chiarissimo Professore Stefano Pagliani il quale nel laboratorio del R. Istituto G. Sommeiller pose a mia disposizione gli strumenti e tutto quanto poteva essermi utile.

Dal lab. del R. Istituto Tecnico G. Sommeiller.

1) V. *L. c.*

CONTRIBUTO ALLA TEORIA DELL' ELETTROLISI CON CORRENTI ALTERNATE;

DOTT. RICCARDO MALAG LI.

Sunto dell' Autore.

I. La teoria di questo fenomeno esposta dal Dott. G. Mengarini in una interessante Memoria [1]) è basata sopra una serie di esperienze che ho ripetuto con egual risultato. Brevemente essa può definirsi come l' applicazione delle note leggi della elettrolisi a correnti dirette in ogni fase della corrente alternata.

Mentre però le leggi sperimentali del Mengarini parlano di densità di corrente agli elettrodi, i calcoli suoi e quelli del Prof. G. B. Favero, esposti in una Memoria uscita in questi giorni [2]), non contengono traccia della superficie degli elettrodi, e quindi nemmeno si parla della possibilità di elettrodi di diversa grandezza, il che porta a fenomeni singolari osservati per la prima volta dal Mengarini stesso.

Ciò dipende dal fatto che essi hanno adoprato la formula di Kohlrausch [3]) scritta così:

$$p = -h \int_0^t \mathrm{I}\, dt$$

mentre Kohlrausch ad un certo punto fa comprendere che in generale la formula dovrebbesi scrivere:

$$p = -\frac{h}{\mathrm{S}} \int_0^t \mathrm{I}\, dt.$$

Inoltre Kohlrausch avverte che questa formula deve adoprarsi per piccolissimi valori della quantità di elettricità, non essendo la proporzionalità fra essa e la polarizzazione del voltametro altrimenti compatibile. Occorreva perciò determinare l' approssimazione di questa formola e vedere se essa regga o no nel caso di

1) *Atti della R. Acc. dei Lincei*, Serie 4., Vol. VI, pag. 550.
2) *Atti della R. Acc. dei Lincei*, Serie 4., Vol. VII, pag. 110.
3) *Poggendorff Annalen*, Vol. CXLVIII, pag. 143.

superficie diverse agli elettrodi. Mi sono perciò valso della notevole Memoria del Prof. A. Bartoli sulle leggi delle polarità galvaniche [1]) in cui la polarizzazione viene espressa dalla formula:

$$p = -A\left(1 - 10^{-\frac{a}{S}\int_0^t I\,dt}\right)$$

Ho così stabilito:

1.° h è una costante numerica, indipendente dalla natura dell'elettrolito e anche da quella degli elettrodi, nonchè dalla loro forma, sempreche essi sieno nè porosi nè attaccabili dall'elettrolito adoperato o dai suoi elementi; essa è indipendente dalla temperatura cui si opera ed ha per valore 345 712 87 se p è misurato in volts e I in ampères.

2.° Il divisore S rappresenta la superficie di un solo elettrodo, intendendolo in contatto coll'elettrolito con una sola faccia; oppure se la superficie degli elettrodi è diversa al posto del fattore $\frac{1}{S}$ della formula di Kohlrausch, devesi mettere $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}\right)$.

3.° Per adoperare la formula di Kohlrausch, bisogna poter trascurare una quantità come:

$$\frac{p^2}{3,4256}$$

nella misura della polarizzazione del voltametro.

Le induzioni del Mengarini ed i calcoli del Prof. Favero hanno quindi molto limitata applicazione se si fa notare che il massimo di polarizzazione di un voltametro perchè possa verificarsi l'elettrolisi, scende al disotto di 1 volts soltanto per ben pochi elettroliti [2]).

II. Lo studio che mi sono proposto, e che era già condotto a termine avanti la pubblicazione del Prof. Favero, mira a stabilire la verità della teoria del Mengarini, facendo vedere come si può dare ragione con essa di tutte le leggi sperimentali da esso ottenute, e completarle. Per fare questo occorre deter-

1) *Nuovo Cimento*, Serie 3., Vol. VII, pag. 234.

2) Vedansi alcuni di questi valori corretti nel recente lavoro di M. Le Blanc: *Die Elektromotorischen Kräfte der Polarisation; Zeitschrift f. ph. Chemie*, VIII, 3, 1891.

minare la quantità di uno degli elementi dell' elettrolito messo in libertà in una completa fase della corrente polarizzante, od in un intervallo fisso di tempo. È perciò necessario determinare la formula che fa conoscere l'andamento della polarità del voltametro col tempo, per fissare l'istante di ogni fase in cui l'elettrolisi ha principio e fine: determinato così l'intervallo in cui il fenomeno si compie se si integra fra questi limiti l'intensità della corrente si otterrà la quantità di elettricità che prende parte alla decomposizione. Moltiplicando questa quantità per la nota costante che misura la quantità dell'elemento considerato dell'elettrolito che viene messo in libertà dalla corrente 1 nell'unità del tempo, si saprà quanto peso di esso componente è posto in libertà da ogni fase completa della corrente.

Farò qui vedere un caso particolare.

Supponendo trattarsi di tale elettrolito che la forza elettromotrice di polarizzazione necessaria nel voltametro perchè l'elettrolisi possa svilupparsi sia così piccola che possa trascurarsi:

$$\frac{p^2}{3{,}4256}$$

e supponendo inoltre che l'andamento della forza elettromotrice polarizzante possa ritenersi esattamente rappresentata da:

$$\mathrm{A}\ \mathrm{sen}\,\frac{\pi t}{\mathrm{T}}\ ,$$

potrannosi adoprare le formole date dal prof. Favero e quindi tenuto conto della superficie degli elettrodi che supporremo anche eguali si avrà:

$$\begin{array}{l} = \mathrm{A}\ \mathrm{sen}\,\frac{\pi t_0}{\mathrm{T}} \cos\frac{\pi(t_0+t)}{\mathrm{T}} \\ \mathrm{I} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}} \cos\frac{\pi t_0}{\mathrm{T}}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi(t_0+t)}{\mathrm{T}} \end{array} \qquad \text{con} \quad \mathrm{tg}\,\frac{\pi t_0}{\mathrm{T}} = \frac{h\mathrm{T}}{\pi \mathrm{SR}}$$

dove R rappresenta la resistenza totale del circuito.

Per una completa fase della corrente polarizzante, compresa

fra $-t_0$ e $2T-t_0$ la elettrolisi si compie negli intervalli seguenti:

1° da $-t_0$ a $\frac{T}{\pi}\arccos\frac{p_0}{A\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi t_0}{T}}-t_0$

2° da $T-\frac{T}{\pi}\arccos\frac{-p_0}{A\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi t_0}{T}}-t_0$ a $T-t_0$

3° da $T-t_0$ a $T+\frac{T}{\pi}\arccos\frac{-p_0}{A\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi t_0}{T}}-t_0$

4° da $2T-\frac{T}{\pi}\arccos\frac{p_0}{A\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi t_0}{T}}-t_0$ a $2T-t_0$

rappresentando p_0 quel massimo di polarizzazione di cui s' è detto.

E giacchè questi intervalli sono tutti eguali, mentre l' intensità della corrente passa per gli stessi valori, la quantità di elettricità cercata sarà:

$$Q=\frac{4A}{R}\cos\frac{\pi t_0}{T}\int_{-t_0}^{\frac{T}{\pi}\arccos\frac{p_0}{A\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi t_0}{T}}-t_0}\mathrm{sen}\,\frac{\pi(t_0+t)}{T}\,dt$$

Eseguendo la quadratura si trova:

$$Q=\frac{4AT}{\pi R}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{h^2T^2}{\pi^2S^2R^2}}}-\frac{p_0}{\frac{AhT}{\pi SR}}\right)$$

Indicando ora con I_0 i massimi di intensità $\frac{A}{R}$ della corrente polarizzante che nel caso di una dinamo sarà proporzionale alla sua velocità, e con k una costante nota per quanto si disse, la quantità di uno degli elementi dell'elettrolito che vien messo in libertà in un intervallo costante arbitrario di tempo è:

$$Q_e = \frac{4k}{\pi} I_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{\pi^2 n^2 S^2 R^2}}} - \frac{\pi p_e n}{h \frac{I_0}{S}} \right)$$

essendo n il numero delle alternazioni della corrente in un minuto.

Questa formola contiene le leggi della elettrolisi colle correnti alternate. Occorre solo rammentare essere implicita la prima legge sperimentale del Mengarini di essere necessaria una certa densità di corrente agli elettrodi perchè il fenomeno avvenga. E giacchè è assurdo un valore negativo di Q_e, il secondo fattore eguagliato a zero fornisce le condizioni necessarie alla produzione della elettrolisi.

Omettendo gli enunciati della serie di leggi così stabilite, faccio notare come sperimentalmente il resultato possa semplificarsi giacchè l'espressione $\frac{h^2}{\pi^2 n^2 S^2 R^2}$ dove. S è misurato in mm^2 può rendersi trascurabile, come ha realizzato il Mengarini sull'esempio degli sperimentatori precedenti, cosicchè le leggi della elettrolisi a correnti alternate possono dirsi contenute nella formola:

$$Q = \frac{4k}{\pi} I_0 \left(1 - \frac{\pi p_0 n}{h \frac{I_0}{S}} \right)$$

e allora i loro enunciati sono oltremodo semplici.

Quest'ultima formola potevasi ottenere direttamente in modo molto semplice.

Aquila, 10 Dicembre 1891.

CONTRIBUZIONE ALLA TEORIA DEI CIRCUITI MAGNETICI; NOTA PRELIMINARE DI G. PISATI [1]).

(Dagli *Atti della R. Acc. dei Lincei*, Vol. VI, fasc. 3., 1890).

L'osservazione degli spettri magnetici di parecchie elettrocalamite preparate in condizioni molto differenti fra di loro, m'ha fatto sorgere l'idea che la propagazione del flusso magnetico nel ferro fosse un fenomeno analogo alla propagazione del calore nelle verghe metalliche scaldate ad una estremità ed esposte in tutto il resto all'azione raffreddatrice dell'aria ambiente. Per verificare se tale analogia tra i due ordini di fenomeni fosse conforme ai fatti, ho istituito alcune esperienze le quali hanno pienamente confermato i resultati previsti.

Già il Kapp, gli Hopkinson, il Forbes ed altri molti hanno creduto che la propagazione del flusso magnetico nel ferro avvenisse secondo la legge di Ohm, o per meglio dire, secondo la nota legge di Fourier con cui il calore si propaga attraverso un muro di spessore uniforme, di larghezza ed altezza infinita, e del quale le faccie fossero tenute a temperature costanti e differenti fra loro: su questa base fu anzi fondata una teoria delle macchine dinamo-elettriche, la quale sebbene ancor molto imperfetta, viene accolta a' nostri giorni con sempre crescente favore, perchè permette di fare (almeno in via approssimata) la così detta *predeterminazione* della caratteristica d'una dinamo da costruire.

Ma una vera teoria razionale delle macchine dinamo-elettriche non potrà essere fatta se non quando saranno conosciute le vere leggi, secondo cui il flusso magnetico si propaga nel ferro e nelle altre sostanze magnetiche immerse, come sono sempre, in un mezzo magneticamente conduttore qual'è l'aria.

I fenomeni che descriverò qui sotto, provano che la legge di Ohm non è applicabile agli ordinari circuiti magnetici, come del resto è noto ch'essa non vale per un circuito elettrico formato

1) Con la pubblicazione di queste importanti Note del Prof. Pisati "*Il Nuovo Cimento*" intendo di rendere alla sua memoria un omaggio, che se è tardivo non è però meno sincero.

da un filo metallico nudo immerso in un fluido conduttore, quale sarebbe ad esempio l'acqua acidulata. Ma se invece di assomigliare la propagazione del flusso magnetico alla propagazione del calore attraverso un muro di spessore uniforme, od alla propagazione della corrente elettrica in un conduttore immerso in un mezzo assolutamente isolante, si ammette che la corrente magnetica si propaghi in modo analogo a quello del calore nei conduttori parzialmente scaldati ed esposti all'azione d'un ambiente freddo, allora la concordanza tra i risultati esperimentali e quelli previsti è più che sodisfacente.

Prima esperienza preliminare.

a) Un fascio di 25 fili di ferro dolce lunghi un metro ed aventi il diametro di un millim., è stato coperto nel suo mezzo e per una lunghezza di 60 mm. da un'elica magnetizzante di 330 giri distribuiti su quattro strati sovrapposti. Un'altra piccola elica di 100 giri, compresa fra due dischi di ebonite distanti 2 mm. l'uno dall'altro era infilata sul fascio e veniva collocata successivamente a differenti distanze dall'elica primaria. Le correnti d'induzione prodotte all'atto della chiusura o dell'apertura della corrente eccitatrice avente l'intensità di amp. 1,68, erano misurate mediante un galvanometro balistico a riflessione.

Il quadro seguente contiene i risultati delle esperienze: nella 1. colonna sono indicate le distanze d dall'elica indotta al punto di mezzo dell'elica eccitatrice; nella 2. e nella 3. le deviazioni galvanometriche Δ_1 e Δ_2 osservate alla chiusura ed all'apertura del circuito primario; nella 4. la media

$$M = \frac{1}{2}(\Delta_1 + \Delta_2);$$

nella 5. i valori calcolati colla formula

$$Q = Ce^{-xc}; \qquad (1)$$

infine nella 6. le differenze tra i valori osservati e quelli calcolati.

d	Δ_1	Δ_2	M	Q	M — Q
cm. 4	103,2	101,9	101,1	102,1	—1,0
6	63,2	62,9	62,8*	62,8	...
8	39,2	39,0	39,1	38,9	+0,5
10	24,2	23,8	24,0	23,8	+0,2
12	14,3	14,3	14,3	14,6	—0,3
14	9,1	8,9	9,0*	9,0	...
16	5,5	5,3	5,4	5,5	—0,1
18	3,2	3,3	3,2	3,4	—0,2
20	2,3	2,3	2,3	2,1	+0,2
24	1,3	1,4	1,3	0,8	+0,5

Per calcolare i valori di Q furono presi quali punti fondamentali le osservazioni corrispondenti alle distanze $d = 6$ cm. e $d = 14$ cm.: le differenze M — Q non eccedono gli errori di lettura, le parti della scala essendo molto piccole (circa mezzo millim.) ed il fenomeno fuggevole. Ogni osservazione poi è la media di parecchie letture abbastanza concordanti fra loro.

Terminata l'esperienza si è levato il fascio di ferro ed in sua vece si è posto un tubo di vetro: ripetute le osservazioni coll'elica indotta a 4, 6 ed 8 cm. dal punto di mezzo dell'elica magnetizzante, si ebbero i seguenti risultati, che servirono a correggere le osservazioni del quadro precedente:

d	Δ_1	Δ_2
cm. 4	1,5	1,5
6	0,2	0,2
8	0,0	0,0

b) Collo stesso fascio di fili di ferro si è fatta un'altra esperienza adoperando una corrente di amp. 2,05 ed un'elica primaria lunga quanto la precedente e collocata nella stessa posizione sul fascio, ma formata di soli 80 giri distribuiti su due strati.

Nel quadro che segue sono raccolti i risultati delle osservazioni e quelli calcolati colla formula (1), prendendo per punti fondamentali la 1. e la 5. osservazione segnata con asterisco.

d	Δ_1	Δ_2	M	Q	M — Q
cm. 4	27,0	25,9	26,5*	26,5	...
6	15,1	15,0	15,0	15,2	—0,2
8	8,0	7,7	7,8	8,8	—1,0
10	4,7	4,9	4,8	5,0	—0,2
12	2,8	3,0	2,9*	2,9	...
14	2,0	2,0	2,0	1,7	+0,3
16	1,1	1,3	1,2	1,0	+0,2
18	0,8	0,9	0,8	0,6	+0,2

c) Un' altra verifica dei precedenti risultati si ebbe adoperando un cilindro di ferro lungo 60 cm. e del diametro di 18 mm. coperto ad una estremità da una corta elica di 92 giri distribuiti su quattro strati sovrapposti. Con una corrente eccitatrice di circa 2 amp. si ottennero i risultati del quadro seguente:

d	Δ_1	Δ_2	M	Q	M — Q
cm. 2	52,0	53,0	52,5*	52,5	...
7	35,5	34,5	35,0	36,2	—1,2
12	26,5	25,0	25,7	25,0	+0,7
17	18,7	18,3	18,5	17,2	+1,3
22	13,0	13,0	13,0	11,9	+1,1
27	9,5	9,2	9,3	8,2	+1,1
32	6,7	7,0	6,8	5,7	+1,1
37	4,0	3,8	3,9*	3,9	...
42	2,7	2,7	2,8	2,7	+0,1
47	1,8	1,8	1,8	1,9	—0,1
52	1,2	1,0	1,1	1,3	—0,2
57	0	0	...	...	

I valori di Q vennero calcolati colla solita formula (1) ed assumendo per punti fondamentali le osservazioni segnate con asterisco.

Seconda esperienza preliminare.

Una verga cilindrica di ferro lunga cm. 68 e del diametro di 18 mm. venne ridotta ad anello circolare chiuso a fuoco; indi

su una piccola parte dell' anello si è avvolta un' elica primaria di 66 giri distribuiti su due strati. Adoperando una corrente eccitatrice di circa 2 amp. e misurando col solito metodo il flusso magnetico attraverso alcune sezioni differentemente lontane dall' elica primaria, ho trovato i seguenti risultati:

	Sezioni	d	Δ_1	Δ_2	M
Prima metà dell' anello	I	cm. 3	55,0	54,0	54,5
	II	8	41,5	40,5	41,0
	III	13	31,5	31,0	31,2
	IV	18	25,0	24.5	24,7
	V	23	21,0	21,0	21,0
	VI	28	18,0	18,0	18,0
	VII	33	18,0	18,0	18,0
Seconda metà dell' anello	VIII	35	18,0	18,0	18,0
	IX	40	18,0	18,0	18,0
	X	45	20,0	20,0	20,0
	XI	50	24,0	25,0	24.5
	XII	55	28,5	29,0	28,7
	XIII	60	36,0	36,0	36,0
	XIV	65	47,0	47,0	47,0

Le distanze d sono contate secondo la fibra media ed a partire dal centro dell' elica primaria.

Le prime ed ultime tre sezioni, quantunque simmetricamente disposte rispetto all' elica eccitatrice, presentano tuttavia differenze di flusso specialmente molto forti per le sezioni più vicine alle estremità dell' elica magnetizzante. Queste differenze mi sembrano accidentali e da attribuirsi o ad imperfetta omogeneità dell'anello, che invero è stato lavorato molto grossolanamente, o ad un po' di magnetismo residuo: ma ritornerò tra breve su questo e su altri argomenti, appena avrò compiute le esperienze con un fascio circolare di fili di ferro dolce ben ricotto.

Peraltro non posso astenermi dal far rilevare fin d' ora che le osservazioni coll' anello di ferro, sebbene fatte in condizioni

poco propizie, permettono di determinare con sufficiente approssimazione la seguente proprietà, che facilmente si deduce dalla formula (1):

« Se si considerano tre sezioni dell'anello, esterne all'elica « eccitatrice e tali che la distanza angolare tra la 1. e la 2. sia « eguale a quella tra la 2. e la 3., i flussi M' M'' M''' passanti « per queste sezioni soddisfanno la relazione

$$\frac{M' + M'''}{M''} = R \text{ costante ».} \tag{2}$$

Infatti prendendo tre valori consecutivi di M contenuti nell'ultima tabella ed appartenenti all'una od all'altra metà dell'anello, si ottengono per la costante R i seguenti valori:

	Osservazioni combinate				
1ª metà dell' anello	I	II	e	III	R = 2,09
	II	III	e	IV	2,10
	III	IV	e	V	2,11
	IV	V	e	VI	2,03
	V	VI	e	VII	2,17
2ª metà dell' anello	VIII	IX	e	X	2,11
	IX	X	e	XI	2,12
	X	XI	e	XII	1,99
	XI	XII	e	XIII	2,11
	XII	XIII	e	XIV	2,10

È noto che una simile proprietà fu dimostrata da Fourier per le temperature d'un'armilla.

L'analogia tra i due ordini di fenomeni induce a pensare, che anche pel flusso magnetico nel ferro si debbano prendere in considerazione due specie di conduttività magnetica, e cioè una conduttività interna ed una conduttività esterna. Su questo argomento riferirò in una prossima Nota.

RIVISTA

Comptes rendus

(Fine del 1. Semestre 1891).

16. — C. Raveau. *Sulla teoria della luce.* — L'A. accenna che Maxwell ha dimostrato che le componenti del potenziale vettore in un mezzo isotropo soddisfano alle stesse equazioni differenziali del secondo ordine che le componenti dell' allungamento nella teoria dell' elasticità, e aggiunge che vari autori hanno poi stabilito delle relazioni fra i differenti vettori che si introducono nella teoria elettromagnetica della luce e nelle diverse teorie elastiche, limitandosi però alla considerazione delle equazioni lineari e al caso delle onde piane. Sembra all' A. di dover fare maggiormente risaltare le analogie considerando le diverse espressioni dell' energia. In questa prima nota vuol limitarsi al caso di un mezzo omogeneo che possegga una permeabilità magnetica costante in tutte le direzioni; sceglie per assi coordinati i tre assi dell'ellissoide d'induzione elettrostatica, e, presa per l'energia per unità di volume, secondo le notazioni di Maxwell, l' espressione

$$W = \frac{1}{8\pi}(K_1 P^2 + K_2 Q^2 + K_3 R^2) + \frac{1}{8\pi}(\mu\alpha^2 + \mu\beta^2 + \mu\gamma^2)$$

si pone il quesito di metterne una parte sotto forma di una energia cinetica, e l' altra sotto forma di una energia potenziale elastica.

L' A. vi arriva in due modi, cioè:

1° Esprimendo le componenti delle forze elettrica e magnetica in funzione del momento elettromagnetico; dalle note relazioni deduce per l' espressione dell' energia

$$W_1 = \frac{1}{8\pi}\left[K_1\left(\frac{dE}{dt}\right)^2 + K_2\left(\frac{dG}{dt}\right)^2 + K_3\left(\frac{dH}{dt}\right)^2\right]$$
$$+ \frac{1}{8\pi}\left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right)^2 + \frac{1}{\mu}\left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}\right)^2 + \frac{1}{\mu}\left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}\right)^2\right].$$

Uguagliando a zero la variazione rapporto al tempo dell' integrale di questa espressione, esteso a tutto lo spazio, si ottengono equazioni identiche a quelle date da Glazebrook, e che si deducono dalla teoria di Sarrau, mentre la considerazione delle

dette equazioni sole non avrebbe permesso di identificare il vettore di Glazebrook piuttosto col momento elettromagnetico che, per esempio, con la forza elettrica.

2° Introducendo un nuovo vettore **A**, **B**, **C**, non considerato da Maxwell, che l' A. definisce con le equazioni

$$\alpha = -\frac{d\mathbf{A}}{dt}, \quad \beta = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad \gamma = -\frac{d\mathbf{C}}{dt}$$

$$-K_1 P = \frac{d\mathbf{C}}{dy} - \frac{d\mathbf{B}}{dz}, \quad -K_2 Q = \frac{d\mathbf{A}}{dz} - \frac{d\mathbf{C}}{dx}, \quad -K_3 R = \frac{d\mathbf{B}}{dx} - \frac{d\mathbf{A}}{dy}$$

nelle quali il senso di rotazione positivo è quello adottato da Maxwell, l' espressione dell' energia diviene

$$W_2 = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{1}{K_1}\left(\frac{d\mathbf{C}}{dy} - \frac{d\mathbf{B}}{dz}\right)^2 + \frac{1}{K_2}\left(\frac{d\mathbf{A}}{dz} - \frac{d\mathbf{C}}{dx}\right)^2 + \frac{1}{K_3}\left(\frac{d\mathbf{B}}{dx} - \frac{d\mathbf{A}}{dy}\right)^2\right]$$
$$+ \frac{1}{8\pi}\left[\mu\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)^2 + \mu\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)^2 + \mu\left(\frac{d\mathbf{C}}{dt}\right)^2\right]$$

identica a quella data da Mac Cullagh in funzione delle componenti dell' allungamento, salvo il significato fisico delle costanti. Se ne potrebbero anche dedurre le equazioni di Lamè. Così la forza magnetica non corrisponde, come si dice spesso, al vettore di Mac Cullagh, ma alla derivata di esso rispetto al tempo. L'A. fa osservare che l' energia magnetica, considerata da Maxwell come cinetica, corrisponde all' energia cinetica di Mac Cullagh; corrisponde al contrario all' energia potenziale nella teoria di W. Thomson e di Glazebrook, nelle quali la vibrazione è perpendicolare al piano di polarizzazione. Egli fa nullameno questo raffronto fra le idee di Fresnel e quelle di Maxwell. Per l' uno la forza elettrica è funzione lineare delle componenti dello spostamento elettrico; per l' altro la forza elastica è funzione lineare delle componenti dell' allungamento; l' energia elettrostatica, cioè, e l' energia potenziale avranno delle espressioni simili. Non è più lo stesso per l' energia cinetica; per Fresnel questa energia era la forza viva, proporzionale al quadrato della derivata dell' allungamento rapporto al tempo; per Maxwell al contrario essa non è altro che il potenziale elettrodinamico delle correnti di spostamento, la cui espressione in funzione delle componenti dello spostamento è ben diversa da quella di una forza viva. Ora la somma delle due energie è costante, per ipotesi, nella teoria di Maxwell; dunque la teoria di Fresnel, nella quale questa somma è diffe-

rente, non soddisfa al principio della conservazione dell' energia. L' A. conclude dicendo che si constata così, per una nuova via, la mancanza di rigore della teoria di Fresnel.

17. — H. Resal. *Sulle espressioni delle pressioni in un corpo elastico omogeneo.* — L' A. ricorda che nel 1852 Lamé è giunto, con considerazioni sulla trazione e sulla torsione, e con una trasformazione di coordinate a ridurre da 36 a 2 il numero dei coefficienti che entrano nelle espressioni accennate nel titolo della sua Nota. Nel 1856 di Saint-Venant è arrivato al risultato medesimo in un modo più semplice, con la considerazione dei piani e assi di elasticità. L' A. propone in questa Nota di sostituire ai precedenti un metodo suo che ritiene più corto e più soddisfacente.

H. Poincaré. *Sulla teoria dell' elasticità.* — Nella presente Nota l' A. risponde ad alcune critiche fatte da Brillouin nel tomo XIII del *Bulletin des Sciences mathématiques* al suo libro sulla « Teoria matematica della luce ».

E. Bouty. *Costante dielettrica della mica.* — L' A. ricorda che, avendo operato sopra condensatori in mica di buona costruzione (microfarad Carpentier), ha dimostrato (vedi *Conti Resi*, t. CX, p. 1362) che la capacità di questi campioni varia poco con la durata della carica, anche quando, per esempio, questa si riduce ad 1/500 di secondo. Dallo studio dei detti campioni l' A. aveva stabilito che la variazione di capacità fra 0'',1 e 1'' era, in generale inferiore ad 1/200. Era perciò naturale ricercare se negli stessi limiti e con lo stesso grado di approssimazione, si può attribuire alla mica una costante dielettrica invariabile, cioè se la capacità delle lamine di superficie utile S e di spessore e è rappresentata esattamente dalla formola (1) $c = \frac{kS}{4\pi e}$, dove k abbia un valore costante. L' A. ha operato sempre con lamine di spessore inferiore a $0^{cm},01$, e di superficie S superiore a 50^{cq}. Col grado di approssimazione che doveva raggiungere era superfluo ricorrere all' artificio dell' anello di guardia ed egli poteva nella formola (1) prendere per S la totalità della superficie armata; ha eseguito le misure con un metodo semplicissimo fondato sull' impiego dell' elettrometro capillare di Lippmann e di un microfarad ausiliario. Le lamine da studiare erano dapprima argentate col processo Martin, verniciando poi i bordi con gomma lacca. Ha trovato per k i valori seguenti

S eq.	49,50	65,34	65,11	66,41	64,15	
e μ	14,75	29,09	34,88	50,75	89,00	
k	7,91	8,00	8,00	7,91	8,09	Media 7,98.

e ne ha concluso che in una direzione normale al piano di sfaldatura « la mica possiede una costante dielettrica ben determinata », per la quale egli adotta il numero 8.

Volendo determinare la costante dielettrica della mica per mezzo di lamine stagnate si ottengono dei valori di k molto discordanti e troppo piccoli. Di più queste lamine aumentano di capacità in un rapporto considerevole quando si caricano di pesi, effetto dovuto all' interposizione fra lo stagno e la mica di uno strato d' aria irregolare.

Quanto ai residui l' A. dice di non aver trovato differenze specifiche tra le diverse lamine, ma di aver trovato però in una stessa lamina argentata variaz. grandissime secondo lo stato dello strato superficiale di mica non armata, ed afferma che « l'origine incontestabile dei grandi residui è l' elettrolisi delle tracce di sostanze estranee localizzate nello strato superficiale ».

M. Hutin e M. Leblanc. *Sopra un motore a correnti alternate.* — Gli autori affermano di esser giunti a costruire un motore per correnti alternate che, sebbene privo di qualsiasi commutatore, può utilizzare una corrente alternata ordinaria prodotta in una linea unica, e nel quale la coppia sviluppata è indipendente dalla velocità di rotazione, come avviene nelle macchine a corrente continua munite di collettori. Esso si compone di due anelli, uno fisso e l' altro mobile, ricoperto ciascuno da due circuiti distinti che comprendono 2n bobine. L' avvolgimento è fatto in modo che una corrente lanciata in ciascun circuito vi fa nascere 2n poli alternativamente positivi e negativi. I due circuiti di ciascun anello sono disposti simmetricamente l' uno rispetto all' altro. I due circuiti mobili possono esser chiusi ciascuno sopra una resistenza priva di autoinduzione, variabile a piacere; mentre i due circuiti fissi sono collegati in derivazione ai conduttori della corrente alternata che si vuole utilizzare; di più i conduttori di questi due circuiti non hanno la stessa sezione, ed uno di essi è interrotto da un condensatore. Gli autori, partendo dall' ipotesi che, con un processo qualunque, si sia stabilita una differenza di fase di 1/4 di periodo nelle intensità I ed I' dei circuiti fissi, e che si possa porre

$$\mathrm{I} = \mathrm{A}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}, \qquad \mathrm{I}' = \mathrm{A}\cos\frac{2\pi t}{\mathrm{T}},$$

fanno la teoria completa del loro motore e dimostrano che disponendo convenientemente del rapporto delle sezioni dei fili avvolti sui due circuiti fissi, della capacità del condensatore, e facendo variare, secondo una certa legge, le resistenze sulle quali sono

chiusi i circuiti mobili, si svilupperà sull'asse della macchina una coppia motrice la cui intensità sarà indipendente dalla velocità. Gli A. chiudono dicendo che è stato costruito un motore di questo sistema, e che l'esperienza ha completamente corrisposto alla loro teoria.

18. — H. Wild. *Sopra un inclinatore a induzione.* — L'A. ricorda di aver descritto in un articolo del « *Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg* (t. XXVII, maggio 1881) un nuovo metodo di determinazione dell'inclinazione magnetica con la bussola a induzione di Weber, metodo che elimina l'errore proveniente dalla variazione di sensibilità dei galvanometri impiegati col variare dell'angolo di deviazione della calamita. Ricorda poi di aver descritto il metodo, e i resultati ottenuti con uno strumento provvisorio nei *Comptes rendus* del 1884, t. XCVIII, p. 91. L'A. ha fatto costruire pertanto una bussola ad induzione di gran precisione; resulta dall'esperienze fatte nel 1890, e che son descritte dall'A., che con la nuova bussola e col suo metodo egli ha potuto, per mezzo di una sola osservazione, determinare l'inclinazione assoluta con un errore medio di $\pm 4'',5$. Sui primi del 1891 l'errore si è ridotto a $\pm 2'',5$, per modo che, secondo l'A. si trova così risoluto il problema di determinare l'inclinazione, almeno con la stessa esattezza con cui si determina la declinazione.

19. — M. Brillouin. *Teoria elastica della plasticità e della fragilità dei corpi solidi.* — Nell'ordinaria teoria dell'elasticità si suppone che le forze elastiche dipendano dalle deformazioni per mezzo di relazioni lineari. Così non si incontrano che fenomeni di deformazione temporaria, nei quali il solido ritorna alla forma primitiva al cessare delle forze; e non si considerano casi di indeterminazione che hanno molta importanza fisica, perchè corrispondono a stati instabili ai quali succede la rottura del corpo. Ciò premesso l'A. accenna rapidamente alcuni risultati che egli ottenne in questi ultimi casi.

C. Raveau. *Sulla superficie d'onda nei cristalli.* — In una Nota precedente l'A. dimostrò che sono possibili due teorie elastiche dell'elettromagnetismo, nelle quali l'energia elastica e la magnetica corrispondono rispettivamente alla cinetica ed alla potenziale; ma egli osserva che tale identificazione esige che la permeabilità magnetica, oppure la elettrica, sia la stessa in tutti i corpi. L'A. adotta la prima di queste ipotesi, la quale però non può esser vera rigorosamente, altrimenti non conosceremmo la magnetizzazione per influenza.

La teoria elettromagnetica è ben distinta dalle altre, è la più generale, e convien ricercare se le sue conseguenze si accordano con l'esperienza. L'A. cita alcune di queste conseguenze, e annunzia in proposito delle ricerche sperimentali.

R. BLONDLOT. *Sulla determinazione della costante dielettrica del vetro per mezzo di oscillazioni elettriche rapidissime.* — Le oscillazioni elettriche rapidissime, quali si possono ottenere con gli apparecchi di Hertz, sono state utilizzate da J. Thomson per la misura della costante dielettrica del vetro. Egli dalle sue esperienze conclude che « per oscillazioni in numero di 25000000 al secondo la capacità induttiva specifica del vetro ha un valore vicinissimo al quadrato dell'indice di refrazione, ed è molto minore che per oscillazioni più lente ». Contro questa conclusione si può obiettare che è dubbia nel caso di oscillazioni rapidissime la esattezza della formola che ne dà il periodo. Più tardi E. Lecher ha misurato le costanti dielettriche di varie sostanze con un metodo fondato sempre sulle oscillazioni rapidissime, ma senza il sussidio di alcuna formula, ed è arrivato a conclusioni perfettamente opposte a quelle di Thomson. Queste conclusioni contradditorie hanno indotto l'A. a intraprendere delle nuove ricerche, fondandone il metodo sulle oscillazioni rapidissime, ma non usando alcuna formola. Egli è pervenuto a trovare il rapporto fra le costanti dielettriche del vetro e dello zolfo; e, siccome la costante dello zolfo, che è un dielettrico quasi perfetto, si può determinare più facilmente con esattezza, egli l'ha determinata separatamente col metodo indicato da J. Curie (*Annales de Chimie et de Physique* 1889), deducendo poi quella del vetro. È arrivato così alla stessa conclusione di Thomson, trovando solo una piccola differenza fra la costante determinata e il quadrato dell'indice medio del vetro adoperato.

20. — J. BOUSSINESQ. *Sulla spiegazione fisica della fluidità* — M. Brillouin in un articolo *sulla plasticità e la fragilità dei corpi solidi* (*Comptes rendus* 1891, pag. 1054) espone alcune idee riguardanti la spiegazione della fluidità. L'A. fa noto che molte delle stesse idee sono già da tempo da lui esposte nel Corso di Meccanica fisica che egli professa alla Facoltà di Scienze; e lo mostra citando alcuni brani del suo libro « *Leçons synthétiques de Mécanique genérale, servant d'introduction ecc.* (Gauthier-Villars 1889) » e alcuni brani delle sue note manoscritte.

21. — L. CAILLETET e E. COLARDEAU. *Ricerche sulla tensione del vapor d'acqua saturo fino al punto critico e sulla determinazione di questo punto critico.* — In una Nota precedente (*Comptes rendus*, t. CXII, pag. 563) gli autori hanno esposto un

nuovo metodo di determinazione delle temperature e delle pressioni critiche. Quando si opera sull'acqua i metodi ordinari non possono essere impiegati perchè il vetro viene attaccato ad alta temperatura; il metodo descritto dagli autori permette di operare senza vedere il liquido e, per conseguenza, di racchiuderlo in un tubo di metallo resistentissimo. La quantità d'acqua contenuta in questo tubo è variabile nelle diverse esperienze; è sufficiente per fornire del vapore saturo fino al punto critico, ma non può riempire per intero, con la sua dilatazione, lo spazio che la contiene. La curva delle tensioni del vapore saturo è sempre la stessa fino alla temperatura critica, qualunque sia il peso del liquido; ma, al disopra di questa temperatura, a ciascun peso di liquido impiegato corrisponde una curva particolare. Non possiamo dilungarci nella descrizione dei particolari delle esperienze; accenneremo soltanto che i differenti pesi di acqua erano racchiusi in un tubo d'acciaio riunito ad un manometro, che il tubo veniva scaldato ad alta temperatura in un bagno (miscuglio in parti uguali di nitrato di sodio e di potassio, che è liquido a partire da 220°) che con uno speciale artificio la capacità riserbata nel tubo d'acciaio al liquido e al suo vapore era mantenuta costante, dimodochè ad ogni temperatura il manometro indicava la corrispondente pressione, e si potevano tracciare le curve dei resultati prendendo come ascisse le temperature e come ordinate le pressioni. Gli A. cominciarono le esperienze della temperatura di 224° circa, essendo 230° quella a cui si era arrestato Regnault nelle determinazioni delle tensioni massime dei vapori. Essi riportano la curva dei resultati ottenuti, che si raccorda esattamente con quella di Regnault, e in essa il punto critico corrisponde sensibilmente alla ascissa (temperatura) 365° e alla ordinata (pressione) $200^{atm},5$. I resultati ottenuti dagli autori concordano colle formole di Clausius e di Bertrand.

Sebbene nel 1890 il Battelli avesse pubblicati i resultati dei suoi studi sul punto critico dell'acqua, pur nonostante gli A. hanno creduto opportuno di pubblicare il loro lavoro, perchè già fino dal 23 Giugno 1890 avevano consegnato in plico suggellato al Presidente dell'Accademia delle scienze il metodo e i resultati provvisori, ed hanno tardato solo la pubblicazione per controllare le misure manometriche.

Chassagny e Abraham. *Ricerche di termo-elettricità.* — Gli A. rammentano di avere annunciato in una Nota precedente (*Comptes rendus*, t. CXI, pag. 477, 602, 732) che essi hanno esteso la misura delle forze elettromotrici a diverse coppie termoelettriche. Rammentano anche che le loro misure son fatte con

un metodo di opposizione e che, in ciascuna serie d' esperienze, i fili dei metalli studiati, isolati con cura, sono saldati ad una estremità in una stessa piccola massa di rame rosso, per assicurare l' identità di temperatura delle saldature calde, le saldature fredde essendo mantenute nel ghiaccio fondente. Le temperature del bagno in cui pesca la saldatura multipla, misurate per mezzo di un termometro a mercurio di Tonnelot, sono ridotte alla scala del termometro a idrogeno per mezzo di tavole fornite dal « *Bureau international des Poids et Mesures* ».

Gli A. riportano una tavola delle forze elettromotrici osservate colle temperature di 100°, 75°, 50°, 25° sulle coppie ferro-rame, ferro-platino rodiato, ferro-argento e ferro-platino; facendo osservare che la necessità di impiegare fili omogenei ha reso impossibile qualunque misura sul nichel. Calcolando per ciascuna coppia una espressione della forma $E^t_0 = at + bt^2$, che dà a 50° e a 100° i valori osservati, hanno trovato, secondo questa formola, le forze elettromotrici misurate a 25 e 75° corrispondere rispettivamente alle temperature seguenti:

Ferro-rame	Ferro-platino rodiato	Ferro-argento	Ferro-platino
24°,88	24°,885	24°,87	24°,87
75°,13	75°,135	75°,135	75°,135

con le medie rispettive di 24°,875 e di 75°,135.

Resulta da questa tavola che, adottando la scala del termometro a idrogeno, *a nessuna di queste coppie corrisponde una curva parabolica, e che i loro poteri termo-elettrici sono rappresentati non da rette, ma da curve che volgono tutte la loro concavità all' asse delle temperature*.

Se però si adotta una scala in cui le temperature 0°; 24°,875; 50°; 75°,13; 100° corrispondano rispettivamente alle temperature 0°, 25°, 50°, 75°, 100° del termometro a idrogeno *le curve rappresentative delle forze elettromotrici di tutte queste coppie fra 0° e 100° divengono esattissimamente delle parabole, e quelle dei loro poteri termo-elettrici delle rette.*

Gli A. notano in ultimo che i resultati precedenti si applicano egualmente alle altre sei coppie che si possono formare aggruppando diversamente i metalli impiegati.

22. — F. de Lalande. *Nuovi modelli di pila a ossido di rame.* — I nuovi modelli di pila a ossido di rame, presentati dall' Autore, sono caratterizzati dall' impiego dell' ossido sotto forma di agglomerati a superficie metallizzata. Essi sono fondati sulla reazione già fatta conoscere dall' A. e da Chaperon (*Comptes rendus*, 16 Luglio 1883) e che consiste nella dissoluzione dello

zinco nella potassa caustica e nella depolarizzazione per riduzione dell' ossido di rame a rame metallico. I vantaggi dei nuovi modelli sono: avere una minor resistenza interna, mantenersi costanti nell' eseguire un lavoro maggiore, montarsi, smontarsi e trasportarsi con facilità.

23. — CONSTANTIN MICULESCO. — *Determinazione dell'equivalente meccanico del calore.* — Il metodo seguito dall' A. riposa sullo stesso principio di quello di Joule, che consiste nel fare sviluppare il calore nel calorimetro stesso coll' attrito di palette contro l' acqua che esso contiene. Però, mentre nelle esperienze di Joule il lavoro prodotto era piccolo e per conseguenza occorreva molto tempo per ottenere un riscaldamento sensibile del calorimetro, ciò che rendeva necessarie correzioni assai grandi e difficili, invece col metodo dell' autore è notevolmente aumentato il lavoro prodotto nell' unità di tempo col fare uso di un motore elettrico, nel mentre che è conservato il vantaggio del metodo Joule di poter misurare il lavoro direttamente. L' apparecchio dell' A. consiste in un telaio orizzontale, mobile, che riposa per mezzo di due coltelli su due blocchi di pietra stabilissimi. Sul telaio è fissato un motore elettrico Gramme, della forza di un cavallo-vapore, il cui asse coincide con la retta congiungente gli spigoli dei due coltelli. Un calorimetro, sorretto da cavalletti indipendenti dal telaio mobile, formato da due cilindri concentrici, è collocato in modo che il loro asse comune coincida con l' asse di rotazione del motore. Nel calorimetro penetra un asse metallico portante delle elici da battello e congiunto all' asse del motore da un giunto flessibile; per evitare le correzioni dovute agli attriti parassiti la scatola a stoppa è interna al calorimetro. Appena il motore è messo in movimento il telaio che lo sostiene si inclina in senso inverso a quello della rotazione. Allora la misura del lavoro vien fatta caricando di pesi un giogo di bilancia graduale, e fisso perpendicolarmente al piano di simmetria del telaio, fino a che l' apparecchio torni ad essere orizzontale. La misura della quantità di calore vien fatta col metodo a temperatura costante, applicato già da d' Arsonval. L'A. ha fatto 31 esperienze, che sono riuscite molto concordanti; ridotte le temperature al termometro ad aria di Parigi, ha trovato come media dei resultati $I = 426,7$. Il numero trovato da Joule, fatte le correzioni per ridurre le temperature al termometro ad aria di Parigi, era $I = 426,5$.

E. BOUTY. *Proprietà dielettriche della mica ad alta temperatura.* — L' A. ha studiato le proprietà dielettriche della mica dalla temperatura ordinaria fino a 400°. Facendo uso di lamine

di mica argentate non si incontrano difficoltà gravi fino ad una temperatura prossima a 300°, ma al di là l' argento è attaccato a contatto dell' aria e la mica si ricopre di uno strato trasparente di natura elettrolitica. Questo inconveniente si può diminuire, senza toglierlo del tutto, proteggendo l' argento dal contatto dell' aria con uno strato di rame.

Il resultato principale di queste ricerche è stato di mettere in evidenza la invariabilità quasi completa della costante dielettrica per una durata brevissima di carica. Infatti l' A. ha trovato che da 0° a 300° questa costante non varia certo neanche di 1/50 del suo valore; da 300° a 400° l' A. coll' uso del pendolo di torsione, già da lui adoperato altra volta (*Comptes rendus*, t. CX, p. 1362), ha prodotto delle chiusure di circuito che variavano da 0",001 a 0",05 e ha trovato che, in questo intervallo brevissimo, la carica assorbita C è rappresentata in funzione del tempo dalla formula $C = A + Bt$. Il coefficiente B, caratteristica del residuo, cresce rapidamente con la temperatura, ma A conserva un valore che poco si discosta dalla carica normale a corta durata e a basse temperature.

P. GERMAIN. *Applicazione del principio della trasmissione delle pressioni ai trasmettitori telefonici a grande distanza.* — L' imboccatura di un trasmettitore telefonico senza pila può suddividersi in un certo numero di imboccature più piccole, corrispondente ciascuna alla camera d' aria di una armatura telefonica distinta. L' emissione di una voce unica determina così in tutte le colonne d' aria e sulle armature telefoniche delle pressioni proporzionali alla superficie totale delle armature azionate. Si hanno così in ciascuna elettrocalamita delle correnti di induzione simili, e collegando le elettrocalamite in serie si può telefonare a grandi distanze senza microfono, senza pila costante, e senza rocchetto di Edison.

24. — J. BOUSSINESQ. *Sulla deformazione ed estinzione delle onde aeree, isolate o periodiche, propagate nell' interno di tubi di condotta senz' acqua, di lunghezza indefinita.* — L' A. ricorda che la propagazione del suono lungo dei tubi di condotta pieni d'aria è stato studiato teoricamente, nell' ipotesi di movimenti pendolari di così piccola amplitudine da permettere la riduzione delle equazioni alla forma lineare, dapprima da Helmholtz (*Verhandl. d. natur. Vereins zu Heidelberg*, t. III, pag. 16; 1863) trascurando i passaggi alternativi di calore tra la parete e lo strato gassoso contiguo, dipoi da Kirchhoff (*Poggendorff Annalen*, t. CXXXIV, p. 177; 1868) col tener conto di questi passaggi di calore. Dopo alcune osservazioni generali riprende quindi lo studio teorico

del problema esprimendo le condensazioni e le velocità successivamente prodotte sopra una medesima sezione qualunque non più per mezzo di funzioni pendolari del tempo, ma con l' introduzione di una funzione arbitraria. Questo studio però non si può riassumere brevemente.

25. — M. DEPREZ. *Sulla determinazione dell'equivalente meccanico del calore.* — L' A. fa osservare nella sua Nota che i metodi di misura, sia del lavoro meccanico che della quantità di calore, esposti dal Miculesco in una Memoria precedente (*Comptes Rendus*, t. CXII, p. 1308, anno 1891) per determinare l' equivalente meccanico del calore, non sono nuovi. Perchè infatti il metodo di misura del lavoro meccanico fu ideato dall' A. nel 1880, e dipoi impiegato con qualche modificazione dal D' Arsonval; che esso è generale e può servire, come ha già servito, per ricerche di vario genere. Il metodo calorimetrico poi, chiamato dal Miculesco *metodo a temperatura costante* è stato impiegato da Hirn fino dal 1860 e si trova descritto alla pag. 106 della sua *Esposizione analitica e sperimentale della Teoria meccanica del calore* (1862); è stato poi impiegato frequentemente in questi ultimi anni dal D'Arsonval. L'A. dimostra infine che quando si applica il suo metodo per la misura di un lavoro meccanico, impiegando un motore elettrico, non è necessario di collocare il vertice dei coltelli di sospensione sul prolungamento dell' asse di rotazione dell' anello.

V. BJERKNES. *Sullo smorzamento delle oscillazioni hertziane.* — L' A. partendo dalle ipotesi che 1° il movimento dell'elettricità nel risonatore abbia un carattere assai semplice per essere rappresentato dall' equazione del movimento di un pendolo mantenuto in movimento da una forza periodica; 2° lo smorzamento dell' eccitatore e, per conseguenza quello di questa forza periodica sia considerevolmente maggiore di quello del risonatore, mostra come si possa col calcolo e con l' esperienza valutare il decremento delle oscillazioni dell' eccitatore e del risonatore. Annuncia di aver trovato con l' esperienza che il decremento logaritmico nell' eccitatore non è di natura costante, e che i valori da lui trovati sperimentalmente pér gli smorzamenti nell' eccitatore concordano con quelli a cui arriva il Poincaré con considerazioni teoriche. Sicchè l' A. ritiene confermata dall' esperienza la seconda ipotesi, per modo che con essa viene a spiegarsi, come ha proposto il Poincarè per il primo, il fatto della risonanza multipla scoperto da Sarasin e da de la Rive.

A. HURION. *Trasmissione della luce attraverso ai mezzi torbidi.* — La quantità di luce, con la lunghezza d' onda λ, trasmessa

attraverso un mezzo torbido assoggettato a soddisfare a certe condizioni teoriche indicate da lord Rayleigh, e riassunte nel *Trattato d' ottica* del Mascart può essere rappresentata dalla formola $I = I_0 e^{-\frac{k}{h^4}}$, dove I_0 indica l' intensità iniziale e k una costante dipendente dallo spessore traversato e dal numero di elementi intorbidanti contenuti nell' unità di volume del mezzo. Se ne deduce facilmente la relazione $h^4 \log I/I_0 = \log e =$ cost. Peraltro quando si trattano certi liquidi con un reattivo che produca un precipitato si osserva che, in condizioni opportune, la massa liquida prende una tinta bleu, ciò che indica una grande diffusione di radiazioni di piccola lunghezza d'onda. L' A. ha fatto varie esperienze per studiare la luce trasmessa attraverso a questi liquidi. Senza diffonderci nei particolari di queste esperienze troppo lunghi per essere riassunti, riporteremo le conclusioni dell' A., che cioè la legge teorica appare vera al momento della formazione del precipitato, ma non lo è più qualche ora dopo la preparazione; e che in questo caso i resultati delle esperienze si possono esprimere con la formola

$$I = I_0 e^{-\left(\frac{a}{h^4} + b\right)} \quad \text{dove} \quad a = 241\,, \quad b = 0{,}09\,.$$

formola stabilita nell' ipotesi che vi sia una diffusione generale, indipendente dalla lunghezza d'onda, che si sovrapponga al fenomeno primitivo. Dopo qualche giorno si avrebbe

$$a = 0{,}045\,, \qquad b = 104{,}4$$

e il liquido apparirebbe bianco.

26. — M. Brillouin. *Deformazioni omogenee finite. Energia di un corpo isotropo.* — L' A. parte dalla considerazione che un corpo omogeneo si conserva omogeneo quando si assoggetta ad una deformazione per la quale le coordinate finali $x + u$, $y + v$, $z + w$ di un punto son legate alle coordinate iniziali x, y, z da equazioni lineari

$$\begin{cases} u = D_1 x + G_3 y + G_2 z + 2R_3 y - 2R_2 z \\ v = G_3 x + D_2 y + G_1 z + 2R_1 z - 2R_3 x \\ w = G_2 x + G_1 y + D_3 z + 2R_2 x - 2R_1 y \end{cases}$$

i cui coefficienti hanno una grandezza qualunque.

Esso mostra che i due ultimi termini di ciascuna equazione corrispondono ad uno spostamento perpendicolare alla retta R_1, R_2, R_3, costituito da una rotazione attorno a questa linea come

asse, e da una deformazione rappresentata da un' ellissoide di rotazione attorno a quest' asse.

L' A. passa poi a stabilire delle formole che valgono per le grandi deformazioni di un corpo qualunque, in particolare di un corpo isotropo; e dà l' espressione dell' energia ϵ di un corpo isotropo.

F. BEAULARD. *Sulla biassia del quarzo compresso.* — L' A. osserva che la teoria di Gouy (*Journal de Physique*, t. IV, p. 149, 1885) non è stata ancora verificata per i cristalli a due assi; ora siccome il quarzo, compresso in una direzione normale all' asse ottico, diviene biasse, l' A. si è servito di questa proprietà per tentare tale verificazione. Esso riporta nella sua Nota i numerosi risultati numerici a cui è giunto, ma che non possono essere brevemente riassunti qui.

A. WITZ. *Rendimento fotogenico delle sorgenti di luce.* — L' A. dà per misura dei rendimenti relativi delle varie sorgenti (il rendimento fotogenico assoluto essendo il rapporto dell' energia del movimento luminoso all' energia disponibile nella sorgente) le cifre seguenti

SORGENTI	Calorie per carcel-ora
Candela dell' Etoile.	716
Becco a gas Bengel.	567
Becco a ricuperazione	189
Lampada elettrica ad incand. .	20
Arco voltaico	4

Sicchè ammettendo che il rendimento assoluto dell' arco voltaico (che del resto non possiamo misurare) sia eguale a 0,5, quello di una candela di stearina sarà di 0,01, quello delle migliori lampade intensive a ricuperazione 0,02. Ne conclude che l' energia disponibile nelle sorgenti di luce è malissimo utilizzata con esse.

L' A. conforta questa conclusione con un esempio. Nella città di Lilla fu cambiata una illuminazione a gas in illuminazione elettrica, per la quale la dinamo era azionata da un motore a gas. La illuminazione degli ambienti era maggiore e il gas consumato in questo secondo caso era 21500 litri all' ora, mentre per l' illuminazione diretta se ne consumavano 26000.

GUERRE e MARTIN. *Sopra un campanello elettro-magnetico.* — L' *avvertitore cantante* è un timbro d' acciaio le cui vibrazioni sono mantenute elettricamente per mezzo di una elettrocalamita. Esso dà un suono di intensità e purezza notevoli specialmente se si paragona a quello di un diapason dello stesso periodo. Usato

per chiamate è gradevole e musicale e non sgradevole come le sonerie ordinarie. La stabilità del movimento vibratorio permette di studiarne facilmente le leggi, di determinare le linee nodali ecc. Il principio di questo apparecchio è stato applicato, sotto il nome di *palsifono*, a mantenere le vibrazioni di ogni genere prodotte da corde, da diapason, da lamine ecc. In particolare esso si presta facilmente alla costruzione di un istrumento di musica.

X.

Sunti di A. STEFANINI.

E. Hospitalier. *I motori a correnti alternate.* (*L' Electricien*, II n. 33, 1891). — Le distribuzioni dell' energia elettrica per mezzo delle correnti alternate, per numero e per potenza son comparabili, almeno in America, alle distribuzioni analoghe per mezzo di correnti continue; ma sarebbero molto più numerose, se si sapesse utilizzare convenientemente l' energia elettrica distribuita sotto forma di correnti alternate nelle operazioni elettrochimiche nelle quali interviene l' elettrolisi, se quest' energia elettrica si potesse accumulare e convertir facilmente in lavoro meccanico. Per tutte queste applicazioni, il motore a corrente continua è rimasto fin qui superiore alla corrente alternata. Ma gl' inconvenienti sopra detti son largamente compensati da un gran numero di vantaggi: semplicità di costruzione ed economia delle macchine a correnti alternate; produzione facile, diretta, per trasformazione, delle più elevate forze elettromotrici, mentre è difficile sorpassare 3000 volts colle correnti continue; semplicità e facilità d' isolamento; finalmente facilità e semplicità di trasformazione, per mezzo d' apparecchi inerti, privi di organi in moto, d' un rendimento elevatissimo, che può raggiungere il 95 %.

Se il problema di utilizzare le correnti alternate nelle operazioni elettrochimiche o nell' accumulazione dell' energia elettrica è appena cominciato a studiare, la cosa è diversa per i motori a correnti alternate: i principii applicati e i tipi fondati su uno stesso principio sono di già così numerosi, che se ne può fare una classificazione che è riassunta nel quadro seguente:

A. Motori a campo costante, o motori sincroni.

Eccitazione separata	*Magneti* — Magneto-alternatori
	Elettromagneti — Dinamo-alternatori
Autoeccitazione . .	*Correnti raddrizzate* — Zipernowsky.

B. Motori a campo alternato.

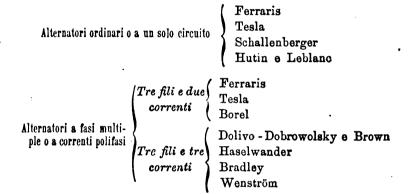
Dinamo in serie — Motori a corrente continua con induttori a lamine.

Dinamo in derivazione — Motori a corrente continua con induttori a lamine.

Motori elettrodinamici — Contatore E. Thomson.

Campo parzialmente raddrizzato — Mordey.

Indotto chiuso — E. Thomson.

C. Motori a campo girante.

Quanto al principio generale un motore alternato non differisce essenzialmente da un motore a corrente continua: vi si trovano sempre le due parti essenziali, un campo magnetico o *induttore* e un sistema indotto girevole; ma mentre il campo magnetico dei motori a corrente continua è sempre costante, quello dei motori a correnti alternate è, secondo i casi, costante, alternato o girante.

A. *Motori a campo costante.* — Questo è il genere di motori che si conosce da più tempo, ed è fondato sul principio della reversibilità degli alternatori. La corrente alternata è mandata in una serie di rocchetti indotti che si muovono in un campo magnetico costante prodotto da un magnete o da un' elettrocalamita. Il più semplice è costituito da un rocchetto di Siemens a doppio T che gira fra le branche di un magnete, o d' un' elettrocalamita eccitata da una sorgente separata: se si è messo già in moto l'indotto con una velocità angolare corrispondente alla frequenza della corrente alternata che è fornita dall' alternatore (50 giri al

secondo, p. es., se 50 è la frequenza della corrente alternata) il movimento del rocchetto indotto continuerà sincronicamente e seguirà tutte le variazioni di velocità dell'alternatore, a meno che non si applichi bruscamente sull'asse una coppia resistente che sorpassi un certo valore: allora il sincronismo cesserebbe, e il motore si fermerebbe in un tempo assai breve. La teoria di questi motori è stata esposta nel 1884 dal Dott. Hopkinson. La necessità di procurare inizialmente il sincronismo e di eccitare separatamente gl'induttori, e l'obbligo di lavorare a velocità angolare rigorosamente costante, hanno impedito a questi motori di avere molte applicazioni industriali. Lo Zipernowsky ha eliminato due dei più gravi inconvenienti di tali motori, rendendoli autoeccitatori, producendo l'eccitazione con una derivazione, nella quale è incluso un raddrizzatore delle correnti: il motore si mette da sè in moto purchè si sopprima la carica, e l'avviamento si faccia a vuoto: raggiunge rapidamente la sua velocità angolare di regime, che conserva in seguito inalterata, malgrado variazioni anche brusche nella coppia resistente.

Il rendimento di questi motori è assai sodisfacente, perchè raggiunge l'80 % per un motore di 4 kilowatts. Malgrado, o più esattamente, a motivo del sincronismo necessario al loro funzionamento, ne è stato fatto un certo numero di applicazioni nei trasporti di forza motrice a distanza.

B. *Motori a campo alternato.* — Ogni dinamo a correnti continue alimentata da correnti alternate può mettersi in moto e girare producendo una potenza meccanica apprezzabile, perchè è comparabile a un elettrodinamometro la cui coppia di torsione resta sempre dello stesso segno malgrado le inversioni della corrente. Ma un motore così costituito presenta gravi inconvenienti: le rapide inversioni di corrente sviluppano nel nucleo degli induttori le correnti di Foucault, che riducono considerevolmente il rendimento del motore, se non si è avuta la precauzione di far gl'induttori con fogli di lamiera: e il grande valore del coefficiente d'autoinduzione dei circuiti del motore ne riduce notevolmente l'intensità efficace.

Per queste ragioni, i motori di questo genere sono poco usati se non per la produzione di piccole potenze: per es. in America son molto diffusi i motori che con 1 a 2 amp. e una differenza di potenziale efficace di 50 v. fanno funzionare dei piccoli ventilatori domestici. L'eccitazione di tali motori è disposta ora in serie, ora in derivazione. Sopprimendo il ferro nell'induttore e nell'indotto, si può avere un motore elettrodinamico di piccola potenza specifica, ma tale che la sua coppia motrice è, ad ogni

istante, proporzionale al prodotto dell' intensità delle correnti che attraversano respettivamente l' induttore e l' indotto. Il motore del contatore d' energia elettrica di Elihu Thomson è il tipo di questi motori elettrodinamici.

Per evitare le perdite dovute alle correnti di Foucault e all' isteresi in seguito alle rapide inversioni del magnetismo negli induttori a correnti alternate, il Mordey ha proposto di far passare la corrente alternata in un raddrizzatore montato sull' asse stesso del motore. Al momento in cui si mette in moto, l' azione di questo raddrizzatore è nulla; mano a mano che la velocità angolare aumenta, la corrente che attraversa il motore vien sempre più raddrizzata, cioè diminuisce la frequenza delle inversioni, le perdite prodotte dalle inversioni diminuiscono, e il rendimento si accresce.

Anche i motori a indotto chiuso appartengono alla classe di quelli a campo alternato. Le esperienze di Elihu Thomson sulle repulsioni elettrodinamiche hanno mostrato che un circuito chiuso, posto in un campo alternato, tende a spostarsi in modo da rendere minimo il suo coefficiente di induzione mutua, cioè da render minimo il flusso di forze che lo attraversa. Se in questo campo alternato si pone una serie di rocchetti elementari mobili attorno a un asse comune, e se un sistema di spazzole disposte opportunamente chiude ciascun rocchetto in corto circuito nel momento in cui il flusso di forza che lo attraversa è massimo e lo apre quando il flusso si annulla lesciandolo aperto fino al momento in cui il flusso ritorna massimo, ciascun rocchetto sarà sottoposto a una forza e produrrà perciò una coppia motrice, che è resa quasi costante dalla moltiplicità dei rocchetti. In questo motore non vi è alcuna connessione fra il circuito inducente e il sistema indotto. Il circuito dell' induttore è metallicamente chiuso sui fili che vengono dal generatore, e quello indotto è chiuso su se stesso. L' esperienza è facilmente realizzabile con una piccola Gramme o Rechniewsky a due poli, purchè si spostino di circa 45° le spazzole nel senso della rotazione. I motori a campo alternato sono poco usati, e non si conoscono fin qui esperienze che indichino il loro rendimento.

C. *Motori a campo girante.* Il Ferraris ha indicato per primo nel Marzo 1888, il principio dei motori a correnti alternate, motori il cui sviluppo attuale fa prevedere assai prossima una vera rivoluzione tanto nel trasporto di grandi forze motrici a grandi distanze, quanto nella distribuzione dell' energia elettrica per motori di piccola potenza. Secondo il principio stabilito dal Ferraris quando due correnti alternate dello stesso periodo, ma l' una delle

quali è in ritardo di un quarto di periodo sull' altra, attraversano due circuiti disposti ad angolo retto, la resultante dei due campi, che sarebbero prodotti da ciascuna corrente separatamente, dà un campo magnetico girante, d' intensità e di velocità angolare costante, che fa un giro intero ad ogni periodo. Se in questo campo girante si pone un circuito chiuso su se stesso, in esso si produrranno delle correnti indotte, che tenderanno a farlo girare nel senso stesso della rotazione del campo. Salvo il modo di produrre il campo girante, la rotazione così ottenuta è identica a quella del così detto magnetismo di rotazione di Arago.

Si può anche dire, più esattamente, che il motore a campo girante funziona in virtù delle correnti di Foucault di cui è sede. Queste sarebbero nulle se il circuito fosse immobile nel campo, cioè se il circuito girasse colla stessa velocità angolare del campo, ed è per sodisfare a questa immobilità relativa che il circuito gira nel campo e nello stesso senso di esso.

Benchè d' invenzione relativamente recente, i motori a campo girante son di già svariatissimi per principio e per disposizioni. Essi distinguonsi principalmente per il modo di produzione del campo girante e per il generatore che li alimenta.

a) *Alternatori ordinari.* — Molti modi permettono di ottenere, con una corrente alternata ordinaria, due correnti alternate spostate di un quarto di periodo, e capaci perciò di produrre un campo girante.

Il Ferraris ha proposto d' impiegare due circuiti alimentati, il primo direttamente dall' alternatore, l' altro dal circuito secondario di un trasformatore il cui circuito primario è montato in derivazione sull' alternatore. Il Tesla ha proposto ed usato due circuiti in derivazione che abbiano diversissime le costanti di tempo. Lo Schallenberger dispone un circuito indotto chiuso su se stesso e posto obliquamente rispetto al circuito primario alimentato dall' alternatore. Le reazioni fra il circuito principale e quello indotto producono un campo girante. Nel motore di Hutin e Leblanc il campo girante è ottenuto con due serie di rocchetti montati in derivazione, ma intercalando un condensatore in uno dei circuiti. Si ottiene così con facilità lo spostamento di un quarto di periodo necessario alla produzione del campo girante.

b) *Alternatori a fasi multiple, o a correnti polifasi.* — Le soluzioni sopra indicate convengono alla distribuzione della forza motrice e all' alimentazione dei motori di piccola potenza o di potenza media. Per i trasporti di grandi potenze si preferiscono dei generatori speciali, che producano non più una corrente alternata

ordinaria, ma diverse correnti alternate, spostate di una conveniente frazione di periodo, cioè correnti alternate *polifasi*.

La soluzione più semplice è data da due correnti condotte da 4 fili o da 3 soltanto se si adopra pel ritorno un filo comune. Disposizioni di questo genere furono preconizzate da Ferraris e da Tesla. Dovendo ricorrere a tre fili, si preferisce di utilizzarli alla produzione di tre correnti di periodo uguale, ma spostate, l' una rispetto all' altra, di $^1/_3$ di periodo, profittando del fatto che per tali tre correnti la somma algebrica delle intensità è ad ogni istante nulla, ciascun dei fili servendo di ritorno alle correnti che nello stesso istante percorrono gli altri due. Tale è il principio dei motori a correnti polifasi realizzati da meno di due anni da Dolivo-Dobrowolsky, Haselvander, Bradley e Wenström. Un trasporto di forza motrice di 300 cavalli, fondato su correnti di questo genere, fu sperimentato con successo fra Lauffen e Francoforte sul Meno, su una distanza di 175 km., per mezzo di correnti a tre fasi generate a bassa tensione, trasformate ad alta tensione (da 20000 a 30000 v) da trasformatori isolati con petrolio, combinati specialmente per tale scopo dal Brown. All' arrivo tali correnti eran trasformate di nuovo in correnti a bassa tensione da un trasformatore analogo al primo e poi inviate in un motore a campo girante e a corrente a tre fasi. L' interesse affatto particolare di queste esperienze risiedeva nel fatto, da fissarsi definitivamente, che le correnti alternate si prestano meglio di quelle continue alla trasformazione e alla canalizzazione di potenze elettriche rappresentate da alti potenziali e da piccole intensità. I motori a campo girante sono, d' altra parte, apparecchi a circuiti metallicamente chiusi e che non posson perciò dare scintille d' estracorrente, nè alcuna interruzione pericolosa; la sola interruzione necessaria è quella del commutatore per avviare o fermare il motore, e che può situarsi in un luogo ove si possan prender tutte le precauzioni per evitare ogni pericolo.

Questa rapida enumerazione dei modi attualmente usati o studiati per la comoda ed economica trasformazione dell' energia elettrica delle correnti alternate in lavoro meccanico, ci mostra che si può considerare fin d' ora il problema come risoluto. Sarà senza dubbio altrettanto ben presto della utilizzazione delle correnti alternate nelle operazioni elettrochimiche ove interviene l' elettrolisi, e nell' accumulazione dell' energia elettrica: le correnti alternate prenderanno allora un' importanza industriale maggiore di quelle continue, ed assisteremo ad una nuova evoluzione dei procedimenti elettrici, in attesa di quella che ci riserbano, più tardi, le correnti alternate di grande frequenza.

Arch. des Sciences phys. et nat. (3), XXV, 1891.

F. LECONTE. *Alcune esperienze d' acustica.* — Per riconoscere che anche i rumori hanno carattere musicale, invece delle solite tavolette di legno l' A. ha trovato vantaggioso l' uso di tubi di vetro, che scelti di lunghezze convenienti dànno la scala musicale non solo lasciandoli cadere su una tavola un dopo l' altro, ma anche soffiandovi come in un flauto di Pane, oppure disponendoli su due corde tese e battendoli al modo dell' armonica a lastre di vetro.

Chiudendo con dei tappi le estremità dei tubi per impedire le vibrazioni dell' aria, il suono è meno intenso, ma conserva la sua altezza. Ripieni d' acqua, dànno suoni che sono 2 o 3 ottave più bassi. Riempiendoli di mercurio o di sabbia, invece, i suoni spariscono, e tutti dànno un rumore presso a poco uguale.

Per produrre facilmente delle vibrazioni longitudinali l' A. consiglia di sfregare su un tubo di vetro, o anche su una bottiglia ordinaria, un pezzo di sughero bagnato.

Per mostrare la generazione dei suoni sordi, il Meerens di Bruxelles consiglia di produrre da prima una bella nota musicale battendo sull' orlo un bicchiere di vetro a calice: stringendo poi colle mani il bicchiere sempre più in alto, il suono diviene via via più sordo per tramutarsi finalmente in un rumore, quantunque l' altezza del suono non sia mai cambiata. L' A. prende invece tre bicchieri che rendano l' accordo do mi sol; e smorzandone le vibrazioni al modo del Meerens la gradazione dei suoni è ancora apprezzabilissima dall' orecchio meno esercitato.

H. POINCARÈ. *Sulla risonanza multipla delle oscillazioni hertziane.* — È noto il fenomeno della risonanza multipla scoperto da Sarasin e De la Rive (cfr. *N. Cim.* 27, pag 278 e 28, pag. 66) la quale sarebbe dovuta, secondo quei fisici, al fatto che l' eccitatore emetterebbe non una vibrazione semplice, ma una specie di spettro continuo e ogni risonatore rinforzerebbe poi quella vibrazione di tale spettro, colla quale fosse accordato. La teoria sembrerebbe esigere invece che lo spettro emesso dall' eccitatore fosse composto soltanto di un certo numero d' armoniche distinte, e fosse, per conseguenza, discontinuo. Ma, oltre che questa teoria è sempre assai male stabilita, essa non tiene alcun conto dei fenomeni complicatissimi di cui è sede l' interruttore a scintille e che ci sono affatto ignoti. Poichè l' ufficio di tali scintille potrebbe essere di dare una certa sfumatura alle strie dello spettro dell' eccitatore, e di allargarle in modo da render conto dei fenomeni osservati

dai fisici ginevrini, questa teoria non permette di rigettare senza altro le vedute dei sigg. Sarasin e De la Rive.

Nel suo libro *Elettricità e Ottica* l' A. ha proposto una nuova spiegazione del fenomeno della risonanza multipla, basandosi sul rapido smorzamento delle oscillazioni emesse dall' eccitatore; ma essendosi trattenuto troppo poco su tale argomento, forse troppo poco per esser chiaro del tutto, egli espone dettagliatamente in questa Nota il suo pensiero, mostrando che lo smorzamento delle oscillazioni basta per spiegare tutti i fenomeni osservati, e che in ogni caso deve contribuire a produrli quanto la causa cui sono unicamente attribuiti da Sarasin e De la Rive, perchè in grazia di esso una riga spettrale deve produrre l' effetto di una striscia più larga.

Per la ristrettezza dello spazio, non si può qui che accennare all' importanza di questa Nota, che sarà consultata con profitto da quanti si occupano di queste interessanti ricerche.

Wied. Ann. der Phys. und. Chem. Vol. XLII, 1891.

G. Hüfner e E. Albrecht. *Sulla trasparenza dell' acqua per la luce di diverse lunghezze d' onda.* — Queste ricerche furono intraprese non solo per risolvere il problema della colorazione propria delle acque naturali, ma più ancora per l' interesse che hanno negli studii biologici dei laghi profondi.

Il metodo seguito consisteva nel far arrivare sotto lo spettro di una sorgente luminosa posto direttamente davanti a uno spettrometro, quello di un altro raggio luminoso, che originariamente aveva la stessa intensità del primo, ma che era indebolito nell' attraversare una colonna d' acqua lungo m. 1,80. Un nicol interposto sul tragitto del primo raggio permetteva di far coincidere le intensità luminose nelle diverse parti dello spettro; e quindi dalle rotazioni del nicol si poteva dedurre l' intensità della luce trasmessa.

I resultati ottenuti mostrano due righe nere in prossimità delle regioni C e D dello spettro, e che erano già state indicate, fra gli altri, da Soret e Sarasin; ma non fu costatata la presenza della riga nel bleu, osservata da Vogel e da Aitken nell' acqua del Mediterraneo .

I valori assoluti dell' assorbimento coincidono con quelli ottenuti dal Boas nel 1881. Sarebbe utile tener conto anche dell' influenza della temperatura; ma essa è difficile a determinarsi, perchè la variazione che il colore produce nel numero e nell' attività delle particelle o degli organismi che si trovano in sospensione nell' acqua, modifica notevolmente l' assorbimento della luce.

S. Arrenius. *Sulla conduttività elettrica dei vapori salini riscaldati.* — Secondo i concetti più recenti i corpi gasosi dovrebbero condurre l' elettricità elettroliticamente; cioè in un gas attraversato dall' elettricità alcune molecole dovrebbero essere scomposte in joni carichi di uguali masse elettriche. Se non è facile rendersi conto come ciò possa avvenire per i gas elementari, come ossigeno, idrogeno etc., perchè non è ben chiaro come i due atomi di una molecola, che sono fra loro identici, all' atto della separazione debbano caricarsi di elettricità opposte, la difficoltà sparisce per le molecole dei vapori salini, delle quali si sa che in uno stato assai prossimo a quello gasoso, cioè nelle soluzioni, si scompongono parzialmente nei loro ioni.

Secondo E. Wiedemann e H. Ebert (*N. Cim.* 25, p. 70) i vapori non possederebbero conduttività elettrolitica: ma l' A., non ritenendo scevra da obiezioni tal conclusione, ha ripreso a studiare la questione, col metodo più semplice che fosse possibile.

A tale scopo i vapori salini da studiarsi erano fatti arrivare, per mezzo di un polverizzatore, e nel modo già indicato dal Gouy (*Ann. de Chim. et de phys.* 1879) nella fiamma di un bruciatore Bunsen, entro la quale eran poste due laminette di platino che facevan parte del circuito di una pila e di un galvanometro. In questa maniera si potevano determinare le variazioni di conduttività della fiamma, quando in essa arrivavano i vapori di diverse soluzioni; e l' A. trovò che per la conduttività dei vapori la legge di Ohm è applicabile soltanto per forze elettromotrici inferiori a 0,2 Daniell. Il potere conduttivo dei vapori salini è prossimamente proporzionale alla radice quadrata della loro concentrazione e per grandi diluizioni indipendente dall'elemento elettronegativo del sale. Per i sali alcalini esso cresce col peso atomico del metallo. Gli acidi, i sali di ammonio e i sali dei metalli pesanti non sono conduttori. Lamine di ferro e di nichel introdotte nei vapori salini, hanno côl platino una differenza di potenziale, che tende a far circolare nella fiamma una corrente diretta dal ferro o dal nichel al platino.

La conclusione delle esperienze eseguite, e di una lunga discussione, è che deve ritenersi verificata l' ipotesi di Van t' Hoff relativa all' analogia fra lo stato gasoso e le soluzioni estremamente diluite.

K. R. Koch. *Su una modificazione che subiscono gli elettrodi nella polarizzazione, e sull' occlusione dei gas.* — Per mezzo di una disposizione facile a immaginarsi, l' A. faceva oscillare attorno a un asse verticale una sfera di platino, sospesa a un filo di torsione, e che si appoggiava su una capsula di vetro. Tutto era cen-

trato colla massima cura, in modo che il punto di appoggio della sfera fosse precisamente sull' asse di rotazione. La capsula di vetro è munita di un anello di platino che permette di polarizzare la sfera in un senso o nell' altro, dopo aver aggiunto qualche goccia del liquido da studiarsi. Lo smorzamento prodotto dall' attrito nei due casi era diverso; per es. la diminuzione media delle ampiezze d' oscillazione, calcolata colla formula di Warburg e Babo, fu in una serie di esperienze:

Platino nell' acido solforico diluito:

Non polarizzato	5,70
Polarizzazione H.	5,13
Polarizzazione O	13,33
Non polarizzato	7,40
Polarizzazione H.	4,76
Non polarizzato	7,40

La diminuzione dell' attrito prodotta dall' idrogeno è dunque molto minore dell' aumento corrispondente all' ossigeno.

Contrariamente ai resultati trovati dal Waitz (*Wied. Ann.* 1883) l' ossigeno aumenta l' attrito anche quando lo svolgimento del gas è sensibile.

Questi resultati si spiegano, secondo l' A., con l' occlusione dei gas, che formerebbero una specie di composto particolare alla superficie della sfera; perchè l' effetto è nullo se si aggiungono al liquido dei reattivi, come l' acido pirogallico, capaci di assorbire i gas che vanno sulla sfera. La teoria di Warburg, che attribuisce la variazione dell' attrito a una variazione di concentrazione in prossimità della sfera, non sembra all' A. accettabile.

Altre esperienze eseguite con altri elettroliti, che svolgevano altri gas, portano l' A. a ritenere che il cloro, l' azoto e l' ammoniaca possano essere assorbiti dal platino, come avviene per l' idrogeno, l' ossigeno e l' ossido di carbonio.

J. Bergmann. *Bilancia d' induzione con un interruttore e un galvanometro.* — Per poter sostituire un galvanometro all' elettrodinamometro nelle misure fatte colla bilancia d' induzione, e renderle così più precise, l' A. ha usato un interruttore formato con una lamina di ferro mantenuta in vibrazione da un' elettrocalamita e portante due fili isolati, che pescano in due pozzetti di mercurio sostenuti da viti che permettono di alzarli o abbassarli a volontà. Uno dei fili è intercalato nel circuito inducente, l' altro in quello indotto della bilancia e di un galvanometro. L' interruttore è disposto in modo che la corrente indotta di chiusura

passi nel galvanometro in un istante che si può regolare a volontà sollevando più o meno il pozzetto corrispondente.

Con questo apparecchio l' A. ha confrontato la conduttività dello zinco, del rame, dello stagno, del piombo e dell' ottone con quella del mercurio a 0° c. I metalli anzidetti si adoprano in lastre di 85 cm. di diametro, che si ponevano simmetricamente fra i rocchetti della bilancia, ristabilendo l' equilibrio per mezzo di pacchetti di foglie di stagnola poste dall' altra parte. I resultati ottenuti differiscono da quelli di Mathiessen e Rose, di Benoit e di H. F. Weber. Il rincuocimento fa variare la conduttività; l'aumenta nel rame, la diminuisce nell' ottone.

Se si vuole adoprar la corrente di apertura, bisogna intercalare l' interruttore del circuito indotto in una derivazione posta sul galvanometro: allora la corrente inversa passa per la derivazione e quella diretta per il galvanometro.

E. LÉVAY. *Relazione fra il lavoro elettrico e l' energia chimica nelle pile galvaniche.* — Il metodo seguito dall' A. in queste ricerche è diverso da quello di Jahn; e la differenza consiste in questo, che l' A. determinò il calore che si svolge nell' elemento galvanico e quello che si svolge nel circuito (quest' ultimo mediante un voltametro ad argento) introducendo tanto la pila che il voltametro in un calorimetro di Bunsen; mentre Jahn calcolava il calore svolto nel circuito servendosi della legge di Joule e dell' intensità della corrente misurata con un galvanometro. I resultati trovati confermano quelli ottenuti da Jahn, cioè la validità della legge di Helmholtz.

R. SISSING. *Sul fenomeno magneto-ottico di* Kerr *nella magnetizzazione equatoriale del ferro.* — Scopo dell' A. è stato di determinare la fase e l' ampiezza della componente magneto-ottica che si ha nel fascio riflesso, quando la magnetizzazione del ferro è parallela al piano d' incidenza e alla superficie speculare.

Egli ha trovato, come altri sperimentatori, che l' ampiezza e la fase della componente magnetica parallele al piano d' incidenza sono uguali a quelle perpendicolari al piano stesso. Anche la teoria conduce al medesimo resultato; ma fra le fasi calcolate e quelle osservate si ha una differenza di circa 90°, la quale accenna forse a un diverso contegno delle correnti elettriche ordinarie e dei moti periodici dell' elettricità che si considerano nella teoria elettromagnetica della luce.

E. LECHER. *Sulla misura delle costanti dielettriche per mezzo delle oscillazioni hertziane.* — Questa Memoria contiene la descrizione delle esperienze alle quali fu già accennato in questo Giornale, vol. 28, pag. 268.

H. Rubens. *Sulle onde stazionarie nei fili e sulla loro misura.* — (Vedi *N. Cimento*, 30, pag. 182).

A. Elsas. *Sulla misura delle resistenze coll' induttore differenziale.* — L' A. ha cambiato la costruzione dell' induttore differenziale che adoprò già nella misura delle resistenze metalliche (cfr. *N. Cim.* 27, pag. 93), onde potersene servire anche per le resistenze elettrolitiche.

Sopra una spirale inducente, formata con 6 strati di 101 e 102 spire ciascuno di filo ben isolato di 0,7 mm. avvolto su un nucleo di ferro dolce dello spessore di 12 mm., e nella quale circolano correnti periodiche, si avvolgono due fili perfettamente uguali di 0,15 mm., fortemente paraffinato, in 26 strati di 5190 giri per ciascun filo, e questi due fili si uniscono coi capi di un telefono in modo, che il filo del telefono sia percorso in direzioni opposte dalle correnti indotte nei due fili uguali, e quindi in modo che non si abbia nessuna azione sulla membrana telefonica.

Nel circuito primario si trova un interruttore automatico, come nell' induttore del Kohlrausch; e tale interruttore è formato con una molla d' acciaio, di quelle da orologi, tagliata a triangolo isoscele, la cui punta porta un filo di platino che pesca in un pozzetto di mercurio.

Per confrontare fra loro due resistenze R e W prive d' autoinduzione, s' introducono queste due resistenze in serie nel circuito del telefono, e i due capi che rappresentano il principio dei due circuiti indotti si uniscono col punto di congiunzione fra W e R, mentre la fine di uno di quei circuiti si unisce col punto in cui il telefono comunica con R, e la fine dell' altro circuito col punto di congiunzione fra W e il telefono. Le equazioni di Kirchhoff mostrano allora che se il telefono tace deve essere $W = R$.

Questo apparecchio può servire anche alla misura della resistenza interna delle pile.

L. Natanson. *Osservazioni termodinamiche.*

I. *Sulla distribuzione dell' energia interna.* — Sia U l' energia totale interna d' un corpo omogeneo, s la sua entropia, v il suo volume, t la sua temperatura assoluta e p la pressione cui è soggetto. Le funzioni $F = U - ts$, $G = ts$ sono state chiamate da Helmholtz energia « libera » e energia « combinata ». Ora l' A. fa osservare che se dQ e dW sono il calore acquistato e il lavoro eseguito durante una variazione elementare, e se si pone dR in luogo di $-sdt$, per una variazione termodinamica invertibile qualunque si hanno le equazioni

$$dG = dQ - dR \qquad dF = dR - dW$$

ossia

$$dQ = dG + dR \qquad\qquad dR = dF + dW$$

e da queste si vede che dR rappresenta la parte di energia che in una variazione elementare passa dallo stato di energia combinata a quello di energia libera; cioè secondo Helmholtz dR è l' energia interna « trasformata ».

L' A. chiama invece dR « calore trasformato » e osserva che mentre F per le trasformazioni isoterme rappresenta una provvista arbitrariamente trasformabile di lavoro, la funzione che vi corrisponde per le trasformazioni adiabatiche è

$$J = -pv$$

mentre $U - J = U + pv$, che egli indica con H, corrisponde alla funzione G.

Introducendo ora la funzione nota

$$K = U - ts + pv$$

si può formare il sistema di equazioni:

$$dQ = dG + dR$$
$$dR = dK + dV$$
$$dV = dJ + dW.$$

L' energia totale interna U è stata quindi divisa nelle tre parti G. J. K, che sono: G l' *energia termica interna*, J l' *energia meccanica interna* e K l'energia potenziale interna. Dalle equazioni precedenti si vede infatti che in una variazione elementare invertibile dQ è l' energia termica interna introdotta dal di fuori, dR quella che da termica interna si trasforma in potenziale interna, dV da potenziale interna diviene meccanica interna, e dW è quella che a spese dell' energia meccanica interna è comunicata ai corpi esterni.

I due principii della termodinamica si posson quindi così enunciare per tutti i processi invertibili:

Per ogni aumento di calore cresce l' energia termica interna, per ogni trasformazione di calore essa diminuisce, ma cresce l'energia potenziale interna, mentre questa diminuisce per ogni trasformazione di lavoro. L' energia meccanica interna cresce nelle trasformazioni del lavoro, diminuisce per ogni lavoro eseguito.

II. *Sul punto triplo.* — Il punto triplo è quello nel quale si tagliano le tre linee neutre di un corpo, cioè la curva di evaporazione, quella di sublimazione e quella di fusione. Se v_1 v_2 v_3

sono i volumi dell' unità di massa per i tre stati del corpo (solido liquido, aeriforme) nel punto triplo, se p_a p_b p_c sono le pressioni valutate respettivamente lungo le tre curve anzidette, l' A. dimostra che si ha

$$\alpha) \qquad (v_2 - v_3)\frac{dp_a}{dt} + (v_3 - v_1)\frac{dp_b}{dt} + (v_1 - v_2)\frac{dp_c}{dt} = 0$$

ove t è la temperatura, e quest' equazione è chiamata da esso la «caratteristica del punto triplo». Se r_a, r_b, r_c sono le calorie di vaporizzazione, di sublimazione, e di fusione respettivamente per l' unità di massa nel punto triplo, si ha:

$$r_a = t_0 (v_3 - v_2)\frac{dp_a}{dt}$$

$$r_b = t_0 (v_3 - v_1)\frac{dp_b}{dt}$$

$$r_c = t_0 (v_2 - v_1)\frac{dp_c}{dt}$$

e per la α) si ha

$$r_c = r_b - r_a,$$

come si potrebbe ottenere direttamente dal secondo principio della termodinamica.

Dalla α) l' A. deduce anche

$$\frac{dp_b}{dt} - \frac{dp_a}{dt} = \frac{1}{t_0}\left(\frac{r_b}{v_3 - v_1} - \frac{r_a}{v_3 - v_2}\right),$$

che, se v_1 e v_2 sono trascurabili di fronte a v_3 conduce alla nota relazione del Kirchhoff

$$\frac{dp_b}{dt} - \frac{dp_a}{dt} = \frac{r_c}{t_0\, v_3};$$

mentre se è trascurabile soltanto la differenza fra v_1 e v_2, si ha la relazione data da R. v. Helmholtz:

$$\frac{dp_b}{dt} - \frac{dp_a}{dt} = \left(\frac{dp_c}{dt} - \frac{dp_b}{dt}\right)\frac{v_2 - v_1}{v_3 - v_2} = \frac{r_c}{t_0(v_3 - v_2)}.$$

K. Prytz. *Pompa intermittente a mercurio.* — La pompa è stata immaginata allo scopo di far il vuoto perfetto con poco mercurio. Essa consiste in un tubo A piegato ad U, alto 80 cm., che per un cannello un po' inclinato sull' orizzonte e che termina in un' apertura c capillare comunica con il tubo B di caduta, che in

corrispondenza di c ha una dimensione uguale al tubo A, cioè è largo circa un cm, e va poi a finire in un lungo tubo capillare, nel quale cadrà il mercurio che deve trascinar l'aria da estrarsi dal recipiente che si pone in comunicazione con la parte superiore del tubo B. Per far funzionare la pompa basta versare del mercurio nel tubo a U, finche non arrivi in c, e continuar poi a versarcelo in modo che da c ne esca lentamente e a intervalli (per la resistenza che oppone l'apertura capillare) delle piccole quantità alla volta.

A. OBERBECK. *Sul contegno di strati precipitati sottili rispetto alla corrente elettrica.* — Gli strati di cui qui si parla son quelli che si formano su una membrana che separa due diverse soluzioni saline; e già Ostwald e Tamman (*Zeits. f. phys. Chem.* 6, 1890) si occuparono di alcuni di essi: ora l'A. espone i resultati delle osservazioni fatte in proposito su un notevole numero di casi. Uno dei due liquidi da studiarsi era posto in un vaso di vetro assai ampio; coll'altro liquido si riempivano due tubi di vetro chiusi inferiormente con pergamena vegetale, i quali pescavano nel primo liquido. Poichè l'A. si era proposto di studiar soltanto la polarizzazione alla superficie di contatto dei liquidi, nei due tubi di vetro eran posti elettrodi impolarizzabili; cioè zinco amalgamato con soluzione di solfato o di cloruro di zinco, ovvero rame con soluzioni di sali di rame. La corrente principale e quella di polarizzazione, furono misurate per mezzo di un galvanometro a specchio e di una corrente di compensazione.

Nel caso di ferrocianuro o ferricianuro di potassio coi sali di rame o di zinco, la corrente principale andava continuamente diminuendo, ma in modo che si deve ammettere non solo la produzione di una forza contro elettromotrice, ma anche un rapido aumento di resistenza degli strati che si andavan precipitando sulla pergamena vegetale.

Coi sali di piombo in presenza dei solfati di rame e di zinco, la corrente principale da prima diminuisce, poi aumenta. La polarizzazione è molto grande e si presenta alla membrana catodica, ove si trova uno strato di piombo spugnoso coperto d'idrogeno. Col nitrato di argento rispetto ai cloruri di rame o di zinco, la polarizzazione è dello stesso segno della corrente principale, e si presenta parimenti alla membrana catodica. La sede della f. e. m. è dunque ognora in quello strato precipitato che si accresce per effetto della corrente, cioè là dove si depositano i metalli.

A. OBERBECK e J. EDLER. *Sulle f. e. m. delle pile galvaniche.* — Dopo un'esposizione sommaria delle ricerche conosciute sulla maniera di determinare la f. e. m. delle pile mediante la

cognizione di alcune proprietà delle loro parti, gli A. fanno osservare che manca tuttora uno studio completo della relazione più importante e più semplice, cioè di quella relativa ai processi termici delle pile; e volendo essi studiare alcune questioni rimaste indecise a tal proposito, hanno ritenuto necessario di non doversi limitare a sperimentare con pile reversibili, ma anzi di vedere come si comportino le pile composte similmente, sieno esse costanti o no.

Profittando del fatto che le amalgame possiedono le stesse proprietà elettriche dei metalli che le formano, anche se del metallo vi sian piccolissime traccie, gli A. hanno studiato le combinazioni Hg |liquido| amalgama, col metodo di compensazione. I metalli studiati furono Zn, Cd, Sn, Pb e Bi, in un gran numero di soluzioni di solfati e di cloruri, di concentrazioni diverse, ma sempre molto diluite. Da questo studio resultò che la f. e. m. di tali pile dipende: 1° dal metallo di ciascun elettrodo; 2° dall'elemento elettronegativo della soluzione salina.

Come resultati finali essi trovano: 1° che la f. e. m. si deve calcolare dalle quantità di calore che si presentano nelle reazioni chimiche della pila, ma tenendo conto del calor locale che si può presentare agli elettrodi; 2° che le pile incostanti si posson ricondurre al caso di quelle costanti, ammettendo l'esistenza di strati molecolari di soluzioni diluite dei metalli che formano gli elettrodi, e la cui concentrazione dipenda da molte circostanze, che potranno esser determinate da nuove ricerche.

G. WIEDEMANN. *Sulla determinazione dell' ohm.* — Questa Memoria è già stata riassunta (*N. Cim.* 18, pag. 72); l'A. l'ha pubblicata anche negli Annali, perchè gli Atti dell' Accademia delle scienze di Berlino, nei quali fu pubblicata nel 1884, sono accessibili a un limitato numero di lettori.

J. STEFAN. *Sulla teoria della formazione del ghiaccio, e specialmente sulla formazione del ghiaccio nei mari polari.* — Se si suppone che al disopra di una massa d'acqua l'aria possieda una temperatura a, inferiore a 0°, e che il raffreddamento si propaghi uniformemente nella massa stessa, dal valore a alla superficie libera fino alla temperatura di congelazione dell' acqua al limite inferiore del ghiaccio, e se la temperatura di congelazione si prende per zero della scala termometrica, indicando con h lo spessore del ghiaccio al tempo t, $a:h$ è la caduta del raffreddamento, e se K è il coefficiente di conduttività termica del ghiaccio, $Ka/h \, . \, dt$ è la quantità di calore che nel tempo dt è tolta all' acqua per la formazione di uno strato dh di ghiaccio, e si ha

$$\lambda \sigma d h = \frac{K a}{h} dt$$

ove λ sono le calorie di solidificazione, σ il peso specifico del ghiaccio. Da tale equazione si ottiene:

$$h^2 = \frac{2K a t}{\lambda \sigma}; \tag{1}$$

cioè lo spessore del ghiaccio deve esser proporzionale alla radice quadrata del tempo che è decorso dal principio della formazione del ghiaccio stesso.

Questa legge è soltanto approssimata, perchè la propagazione del raffreddamento non si può ritenere uniforme; e se si volesse trattare il caso della formazione del ghiaccio nei mari polari, bisognerebbe tener conto anche della continua variazione della temperatura dell' aria al di sopra del ghiaccio.

Una maggiore approssimazione si ha dalla formula

$$h^2 \left(1 + \frac{cf}{3\lambda}\right) = \frac{2 K T}{\lambda \sigma} \tag{2}$$

ove f è la temperatura dell' aria alla fine del tempo t, c il calore specifico del ghiaccio, e T è il prodotto della temperatura media durante il tempo t per il tempo t stesso.

Dal confronto coi resultati delle osservazioni fatte da diversi esploratori delle regioni polari, si riconosce che quest' ultima formula rappresenta assai bene i resultati stessi; e se per alcuni si hanno delle divergenze, può derivare da correnti di acqua calda che abbiano disturbato la regolare formazione del ghiaccio.

L' A. termina mostrando come dalla equazione

$$\frac{du}{dt} = k \frac{d^2 u}{dx^2} \tag{3}$$

che rappresenta la propagazione del raffreddamento nel ghiaccio, si ottenga per T l' espressione

$$h^2 \left(1 + \frac{c}{\lambda} \frac{At}{3} + \frac{c^2}{\lambda^2} \frac{A^2 t^2}{12} + \ldots\right) = \frac{2 K T}{\lambda \sigma}; \tag{4}$$

la quale mostra come il fattore di correzione non sia costante, com' è nella (2), ma varii invece col tempo. La (4) si ottiene facendo uso di una soluzione particolare della (3); ma l' A. indica ancora come si possa avere una soluzione affatto generale.

H. Brückner. *Sull' attrito interno delle soluzioni saline.* — Scopo dell' A. è stato di riconoscere se esistono, anche per l' at-

trito interno, quelle che il Bender chiamò soluzioni corrispondenti, tali cioè che le proprietà fisiche di un miscuglio di tali soluzioni siano la media aritmetica di quelle delle singole soluzioni. Per misurare l'attrito interno l'A. si servì del metodo dell'efflusso dai tubi capillari; e i resultati che egli ha ottenuto sono i seguenti:

Fra le soluzioni dei cloruri di Na, Ba, K, NH_4 sono corrispondenti per l'attrito interno a 15° e a 20° c. quelle di un medesimo sale, le quali ad una data temperatura contengono lo stesso peso di molecole per unità di volume.

L'attrito interno di un miscuglio di due soluzioni qualunque è sempre minore della media aritmetica di quelli delle singole soluzioni.

Se una soluzione concentrata di uno dei quattro sali anzi detti si mescola con una soluzione di un sale che diminuisca l'attrito interno dell'acqua, l'attrito interno del miscuglio da prima diminuisce fino a un valor minimo, e poi cresce di nuovo. Tal minimo si presenta per una concentrazione della seconda soluzione, che è tanto maggiore quanto è più bassa la temperatura e minore la concentrazione della prima soluzione.

H. KAYSER. *Sull' origine degli spettri a nastro e a righe.* — È ben noto che un gran numero di elementi presentano due spettri: a bassa temperatura cioè uno spettro a nastro, e a temperatura elevata uno spettro a righe. Ma sull'origine di tali spettri non è concorde l'opinione dei fisici; mentre la maggior parte ritiene che lo spettro a nastro sia dovuto a molecole diverse da quelle che danno origine allo spettro a righe, il Wüllner crede che la molecola sia sempre la medesima, e che la diversità dello spettro sia dovuta all'influenza della densità e dello spessore del vapore che si analizza.

Dall'esame dei fenomeni conosciuti l'A. conclude che l'ipotesi del Wüllner è inammissibile, e che sono effettivamente i cambiamenti molecolari, per la dissociazione che ha luogo ad alta temperatura, che determinano i cambiamenti degli spettri.

S. CZAPSKI. *Sulla doppia refrazione di lastre di vetro rapidamente raffreddate.* — Per osservare i fenomeni che presentano tali lastre nella luce polarizzata, l'A. ha usato un metodo assai più semplice di quello di Kerr. Un collimatore e un cannocchiale, con obiettivi di 36 mm. di apertura e di 380 mm. di distanza focale, son disposti orizzontalmente, e fra essi è posta orizzontalmente la lastra da esaminarsi, colle basi piane e parallele normali all'asse comune del cannocchiale e del collimatore. È necessario che le basi della lastra sian piane; ma una leggera inclinazione

relativa è senza influenza. Nel piano focale del collimatore si trova una fenditura orizzontale, e il cannocchiale è aggiustato per una distanza infinita. Davanti alla fenditura del collimatore si pone un nicol, la cui sezione principale può avere un' inclinazione qualunque sull' orizzonte, ed è illuminato dal di dietro con una lampada; e il cannocchiale si dirige in modo da vedere l' immagine della fenditura. Se allora si sostituisce un nicol all' oculare del cannocchiale, e si accorcia il tubo in modo che l' occhio si ponga nel foco, attraverso l' obiettivo del cannocchiale si vedono delle righe d' interferenza dovute alle compressioni e alle tensioni che la lastra ha subito nel raffreddarsi rapidamente.

Per la luce che attraversa la lastra nel senso del suo spessore, si ha un ritardo maggiore in vicinanza dell' orlo che nel mezzo della lastra; e tal ritardo è maggiore per luce polarizzata parallelamente che per luce polarizzata normalmente alla lastra.

Questo ritardo può ritenersi come dovuto a una continua variazione dell' indice di refrazione dal mezzo all' orlo della lastra, e per uno spessore di circa 30 mm. la differenza fra gl' indici al mezzo e all' orlo può raggiungere un' unità della quarta decimale.

A. Appun. *Sui suoni di combinazione e di sommazione.* — Per udire i suoni di combinazione per somma, l' A. ha riconosciuto che il mezzo migliore è usare un harmonium, e di scegliere delle note i cui intervalli sieno 1 : 12, 1 : 10, 1 : 8, etc. Se si fa rendere da prima il suono fondamentale 1, è facile udirne la nota che corrisponde alla 13ª armonica, ma assai debole; eccitando allora anche l' altra nota 12, il suono di combinazione $1 + 12 = 13$ si sente molto rinforzato anche da un orecchio poco esercitato. Analogamente si può fare per gli altri suoni $(1 + 10) = 11$ e $(1 + 8) = 9$. Quando l' orecchio si è abituato ad udir questi suoni, l' esperienza riesce anche se prima si eccita la nota 12 e poi la 1 etc. Si può avere lo stesso resultato anche con dei diapason.

È noto che le armoniche dispari di un suono qualunque sono sempre più intense di quelle di ordine pari: l' A. spiega questo fatto, osservando che gli intervalli dispari producono un maggior numero di suoni per sommazione di quello che non si abbia con gl' intervalli pari.

Egli osserva ancora che i suoni per sommazione si formano non solo dalla somma dei suoni fondamentali, ma anche dalla somma dei loro suoni di combinazione.

C. Del Lungo. *Sulla pressione e sul volume specifico dei vapori saturi.* — L' A. mostra come la formula di Rankine

$$\log p = k - \frac{a}{T} - b \log T$$

possa dedursi dall' integrazione di quella data dal Clausius per le calorie r di vaporizzazione

$$r = AT(s - \sigma) \frac{dT}{dp}$$

nella quale s è il volume specifico del vapor saturo, σ quello del liquido, ed $A = {}^1/_{424}$, purchè si ammetta la legge di Boyle, si trascuri σ di fronte a s e si ammetta con Clausius che sia $r = \alpha - \beta T$, con α e β costanti.

Analogamente pel volume specifico s del vapore ottiene

$$\log s = k' + \frac{a'}{T} + b' \log T .$$

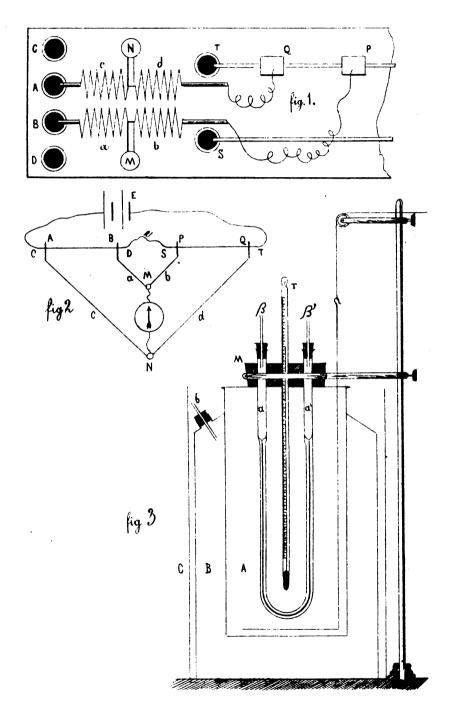
Poichè la funzione p cresce con T finchè $bT < a$, e raggiunge il suo valor massimo per $bT = a$, l' A. ne deduce che $T = a/b$ deve esser la temperatura critica, tanto più che per tal temperatura il calore di vaporizzazione $r = AR(a - bT)$ si annulla.

Proprietà analoghe possiede la funzione s.

M. Margules. *Osservazioni alla Memoria di* Galitzine " *Sulla legge di* Dalton. „ — L' A. fa notare che le divergenze fra alcuni numeri indicati nella Memoria del Galitzine, cui fu accennato già in questo Giornale, vol. 28, pag. 95, e quelli che egli ottenne occupandosi dello stesso soggetto (*Wien. Ber.* 98, pag. 883, 1889), son dovute all' aver il Galitzine fatto uso di una equazione caratteristica del Sarrau, che non è corretta. Usando invece la nuova formula che il Sarrau ha indicato (C. R. 110, pag. 880, 1890) si ottengono valori concordanti con quelli che furon trovati dall' A.

G. H. Zahn. *Sulla resistenza del bismuto per correnti costanti e oscillanti.* — Come già trovò il Lenard (*N. Cim.* 29, pag. 94) anche l' A. ha costatato che il bismuto ha per le correnti costanti una resistenza di circa 0,11 per 100 diversa da quella che ha per correnti oscillanti.

Tav 1

C
A
B
D
N
M
c
d
a
b
T
Q
P
S
fig. 1.
E
A
B
e
P
Q
C
D
S
T
a
M
b
fig 2
c
d
N
T
β
β'
M
a
a'
6
fig 3
C
B
A

SULLE EQUAZIONI FONDAMENTALI DELL' ELETTRODINAMICA PER I CORPI IN MOTO; DI H. HERTZ [1]).

L'esposizione dei fenomeni elettrodinamici pei corpi in quiete che pubblicai recentemente [2]), coincide pel contenuto con la teoria di Maxwell, ma per la forma si presta assai meglio ad una trattazione sistematica. Fin da principio fu usato con rigore il concetto che le forze elettriche e magnetiche in ciascun punto corrispondano, per la loro azione, a condizioni particolari del mezzo che riempie lo spazio e che ivi si trova, e che le cause che determinano la produzione e le variazioni di tale stato, esclusa ogni azione a distanza, son da ricercarsi soltanto nelle relazioni che passano fra i punti che ne costituiscono l'intorno. Fu anche supposto che lo stato elettrico e quello magnetico del mezzo che riempie lo spazio sia per ogni punto completamente determinato da un solo vettore, e si vide che la limitazione, posta con questa ipotesi, esclude dalle nostre considerazioni soltanto dei fenomeni di importanza secondaria. Fu anche evitato l'uso del potenziale nelle equazioni fondamentali.

Si presenta ora la questione se, attenendosi rigorosamente agli stessi concetti e alle stesse limitazioni, si possa estender quella teoria in modo da comprendervi il decorso dei fenomeni elettrodinamici anche pei corpi in movimento.

Si noti da prima, che parlando semplicemente di corpi in moto, s'intenderà sempre soltanto del moto della materia ponderabile. Ma i movimenti che contemporaneamente acquista l'etere, secondo il nostro concetto non possono essere senza influenza, e noi di quei moti non abbiamo alcuna cognizione. Perciò senza introdurre ipotesi arbitrarie sul moto dell'etere, non si potrebbe trattare affatto la questione proposta. Inoltre, le poche nozioni che abbiamo sul moto dell'etere farebbero ritenere che alla questione stessa, presa in modo assoluto, si dovesse rispondere negativamente. Sembra cioè risultare dalle attuali cognizioni che l'etere, anche nell'interno della materia pondera-

1) *Wied. Ann.* 41, pag. 369-399, 1891.
2) *N. Cim.* 28, pag. 193-235, 1890.

bile, si muova indipendentemente dalla materia stessa; anzi, si può a pena fare a meno di questo modo di vedere di fronte al fatto che non è possibile toglier l'etere da nessuno spazio chiuso. Se dunque la nostra teoria si vuole adattare a questo concetto, bisogna considerare in certo modo indipendenti fra loro lo stato elettromagnetico dell'etere e quello della materia ponderabile in ciascun punto dello spazio. I fenomeni elettromagnetici dei corpi in moto appartengono quindi alla classe di quelli, di cui non si può aver ragione se non introducendo almeno due vettori per lo stato elettrico e altrettanti per quello magnetico.

La cosa è diversa, se ci contentiamo espressamente di considerare i singoli fenomeni elettromagnetici nel campo in cui essi sono stati studiati fin qui con sicurezza. Dobbiamo notare, in tal caso, che fra i fenomeni così limitati non se n'ha alcuno che ci imponga di dover attribuire all'etere un moto indipendente dalla materia ponderabile nell'interno della medesima; ciò resulta già dalla circostanza, che non si è potuta mai dedurre, da questa classe di fenomeni, una valutazione dello spostamento reciproco dell'etere e della materia ponderabile. Per lo meno i fenomeni elettrici e magnetici si devon dunque conciliare con l'ipotesi che, in generale, un tale spostamento non si verifichi, e che piuttosto l'etere che si suppone nell'interno della materia ponderabile si muova soltanto con essa. Quest'ipotesi ci dà la possibilità di considerare, in ogni punto dello spazio, soltanto lo stato di un sol mezzo, e permette di rispondere affermativamente alla questione propostaci; e noi l'adotteremo in questa Memoria. La teoria basata su tali fondamenti non avrà, è vero, il vantaggio di dar la risposta esatta, o una risposta determinata, ad ogni questione che ci sia proposta; ma darà a tali questioni una risposta possibile, cioè che non contradica nè ai fatti osservati, nè ai concetti che ci siamo formati rispetto ai corpi in quiete.

Ammettiamo dunque che la materia, che riempie lo spazio, possieda in ogni punto una sola velocità determinata, le cui componenti nelle direzioni x, y, z si indicheranno con α, β, γ. Riterremo queste grandezze finite in ogni punto, e variabili con continuità da punto a punto. Ammetteremo anche variazioni discontinue; ma le riterremo soltanto come casi limiti di una va-

riazione molto rapida. Inoltre, ogni discontinuità ammissibile l'assoggetteremo alla limitazione che essa non conduca mai alla formazione di uno spazio vuoto; e perchè questa condizione sia sodisfatta è necessario e sufficiente che le derivate $d\alpha/dx$, $d\beta/dy$, $d\gamma/dz$ rimangano da per tutto finite. Dove troveremo, nello spazio, materia ponderabile, dal moto di essa dedurremo univocamente i valori di α, β, γ. Dove non si troverà materia ponderabile, potremo attribuire alle α, β, γ qualunque valore arbitrario, che sia conciliabile coi movimenti che si hanno al limite dello spazio vuoto, e che sia del medesimo ordine di grandezza. Potremo, p. es. porre per α, β, γ quei valori, che si avrebbero per l'etere, se questo si muovesse come un gas arbitrariamente scelto. Per il resto si riterranno qui, col medesimo significato, tutte le notazioni che si usarono nel lavoro sopra ricordato. La forza elettrica e quella magnetica si riterranno qui come indicazione dello stato della materia in moto, nello stesso senso in cui prima si ritenevano quali indicazioni dello stato della materia in quiete. La polarizzazione elettrica e magnetica ci serviranno come una seconda maniera equivalente, per caratterizzare lo stato medesimo. Anche alle linee di forza colle quali ci rappresentiamo questa polarizzazione, non attribuiremo alcun altro significato.

1. *Determinazione delle equazioni fondamentali per i corpi in moto.*

In ogni punto di un corpo in quiete la variazione dello stato magnetico è in ogni istante determinata unicamente dalla distribuzione della forza elettrica in prossimità di quel punto. In ogni corpo in moto a questa variazione se ne aggiunge un'altra, che in ogni istante si sovrappone alla prima, e che è dovuta alla deformazione che ha luogo nella vicinanza del punto considerato in seguito a tal movimento. Ammetteremo che l'influenza del moto sia tale, che se essa agisse da sola, le linee di forza magnetiche sarebbero trasportate dal corpo nel suo moto. O meglio: immaginiamoci che lo stato magnetico della sostanza, in grandezza e direzione sia in ogni istante rappresentato da un sistema di linee di forza; un sistema di linee di forza condotto per il medesimo punto materiale rappresenterà anche in ogni istante

successivo lo stato magnetico in grandezza e direzione, se si avesse da considerare soltanto l'influenza del movimento. Altrettanto ammetteremo per la variazione che subisce per il movimento la polarizzazione elettrica. Queste ipotesi bastano per poter estendere ai corpi in moto la teoria esposta per i corpi in quiete, esse sodisfano ai postulati che sono impliciti nel nostro sistema, e si vedrà che comprendono i fatti osservati.

Per fissare le nostre idee, consideriamo durante un elemento di tempo dt un elemento di superficie nell' interno della materia in moto, che al principio del tempo considerato sia parallelo al piano yz e che durante il moto si sposti e si deformi con la materia stessa. Ci rappresenteremo le linee di forza magnetica con una densità tale, che al principio del tempo dt l'elemento di superficie considerato sia attraversato dal numero $\mathbf{L}$ di tali linee. Indicheremo sempre e da per tutto con $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ il numero delle linee di forza che attraversano un elemento analogo di superficie, respettivamente parallelo ai piani yz, xz, xy. Il numero delle linee di forza che attraversano l'elemento di superficie che consideriamo, varia per diverse cagioni: e studieremo separatamente la parte che ciascuna di tali cagioni ha in quella variazione. E da prima, inquantochè il detto numero varierebbe, anche se l'elemento di superficie conservasse la sua posizione iniziale, quella variazione sarà data da $d\mathbf{L}/dt\,.\,dt$, se indichiamo col simbolo $d\mathbf{L}/dt$ la velocità con cui varia $\mathbf{L}$ in un punto che, rispetto al nostro sistema di coordinate, rimane in quiete. In secondo luogo, poichè l'elemento di superficie si trasporta, con la velocità definita da α, β. γ, verso luoghi nei quali si hanno altri valori di $\mathbf{L}$, la velocità della variazione è $(\alpha d\mathbf{L}/dx + \beta d\mathbf{L}/dy + \gamma d\mathbf{L}/dz)\,dt$. In terzo luogo, poichè il piano dell'elemento ruota con la velocità $d\alpha/dy$ attorno all'asse delle z, e con la velocità $d\alpha/dz$ attorno all'asse delle y, per quell'elemento vengono a passare le linee di forza, che inizialmente gli erano parallele, e la parte dovuta a questa causa è $-(\mathbf{M}d\alpha/dy + \mathbf{N}d\alpha/dz)\,dt$. Finalmente l'elemento accresce la sua estensione colla velocità $d\beta/dy + d\gamma/dz$, e il numero delle linee di forza che l'attraversano cresce perciò di $\mathbf{L}(d\beta/dy + d\gamma/dz)\,dt$. Se le parti ora indicate sono tutte quante nulle, non è possibile una variazione nel numero anzi detto; abbiamo quindi esaurito le cause di va-

riazione e poichè tutte le parti di cui si compone sono molto piccole, la loro somma corrisponde alla variazione complessiva. Quest'ultima può peraltro scomporsi anche in un'altra maniera, che tien più conto del lato fisico della questione: cioè in una parte che sarebbe dovuta soltanto all'esistenza delle forze elettriche nelle vicinanze del punto, e in un'altra che sarebbe prodotta dal movimento soltanto, se ogni volta mancasse l'altra di queste cause. Secondo le leggi che valgono per i corpi in quiete, la prima parte è uguale a $1 / \mathrm{A} . (d\mathrm{Z} / dy - d\mathrm{Y} / dz)\, dt$; la seconda, per le nostre osservazioni sopra ricordate, è nulla; quindi soltanto la prima ci rappresenta la variazione totale. Uguaglieremo le due espressioni ottenute per la variazione totale, divideremo per dt, moltiplicheremo per A, sommeremo e sottrarremo i termini $\alpha d\mathbf{M} / dy + \alpha d\mathbf{N} / dz$, ordineremo opportunamente e otterremo così, ripetendo altrettanto per le altre componenti della forza magnetica e di quella elettrica, il seguente sistema di equazioni fondamentali per i corpi in moto:

$$\mathrm{A}\left[\frac{d\mathbf{L}}{dt}+\frac{d}{dy}(\beta\mathbf{L}-\alpha\mathbf{M})-\frac{d}{dz}(\alpha\mathbf{N}-\gamma\mathbf{L})+\alpha\left(\frac{d\mathbf{L}}{dx}+\frac{d\mathbf{M}}{dy}+\frac{d\mathbf{N}}{dz}\right)\right]=\frac{d\mathrm{Z}}{dy}-\frac{d\mathrm{Y}}{dz}$$

$$\mathrm{A}\left[\frac{d\mathbf{M}}{dt}+\frac{d}{dz}(\gamma\mathbf{M}-\beta\mathbf{N})-\frac{d}{dx}(\beta\mathbf{L}-\alpha\mathbf{M})+\beta\left(\frac{d\mathbf{L}}{dx}+\frac{d\mathbf{M}}{dy}+\frac{d\mathbf{N}}{dz}\right)\right]=\frac{d\mathrm{X}}{dz}-\frac{d\mathrm{Z}}{dx}$$

$$\mathrm{A}\left[\frac{d\mathbf{N}}{dt}+\frac{d}{dx}(\alpha\mathbf{N}-\gamma\mathbf{L})-\frac{d}{dy}(\gamma\mathbf{M}-\beta\mathbf{N})+\gamma\left(\frac{d\mathbf{L}}{dx}+\frac{d\mathbf{M}}{dy}+\frac{d\mathbf{N}}{dz}\right)\right]=\frac{d\mathrm{Y}}{dx}-\frac{d\mathrm{X}}{dy}$$

$$\mathrm{A}\left[\frac{d\mathbf{X}}{dt}+\frac{d}{dy}(\beta\mathbf{X}-\alpha\mathbf{Y})-\frac{d}{dz}(\alpha\mathbf{Z}-\gamma\mathbf{X})+\alpha\left(\frac{d\mathbf{X}}{dx}+\frac{d\mathbf{Y}}{dy}+\frac{d\mathbf{Z}}{dz}\right)\right]=\frac{d\mathrm{M}}{dz}-\frac{d\mathrm{N}}{dy}-4\pi\mathrm{A}u$$

$$\mathrm{A}\left[\frac{d\mathbf{Y}}{dt}+\frac{d}{dz}(\gamma\mathbf{Y}-\beta\mathbf{Z})-\frac{d}{dx}(\beta\mathbf{X}-\alpha\mathbf{Y})+\beta\left(\frac{d\mathbf{X}}{dx}+\frac{d\mathbf{Y}}{dy}+\frac{d\mathbf{Z}}{dz}\right)\right]=\frac{d\mathrm{N}}{dx}-\frac{d\mathrm{L}}{dz}-4\pi\mathrm{A}v$$

$$\mathrm{A}\left[\frac{d\mathbf{Z}}{dt}+\frac{d}{dx}(\alpha\mathbf{Z}-\gamma\mathbf{X})-\frac{d}{dy}(\gamma\mathbf{Y}-\beta\mathbf{Z})+\gamma\left(\frac{d\mathbf{X}}{dx}+\frac{d\mathbf{Y}}{dy}+\frac{d\mathbf{Z}}{dz}\right)\right]=\frac{d\mathrm{L}}{dy}-\frac{d\mathrm{M}}{dx}-4\pi\mathrm{A}w$$

per completar le quali occorrono le relazioni lineari, che legano le polarizzazioni e le componenti della corrente con le forze. Le costanti di queste relazioni devon ritenersi funzioni dello stato variabile della materia in moto, e quindi anche del tempo.

Il modo con cui abbiamo ottenuto le eqnazioni (1_a) e (1_b) non richiede che il sistema di assi adoprato sia in quiete assoluta nello spazio. Possiamo perciò trasformare le nostre equazioni in un altro sistema arbitrario di assi che si muova arbitrariamente nello spazio, e senza cambiar loro di forma, purchè con α, β, γ s' intenda di rappresentare le componenti relative della velocità rapporto al nuovo sistema di assi che si è scelto, e purchè parimenti le costanti ϵ, μ, λ, X', Y', Z' dipendenti dalla direzione, si riferiscano in ogni istante al medesimo sistema. Da ciò resulta che il movimento assoluto di un sistema rigido di corpi non ha alcuna influenza sui fenomeni elettrodinamici del sistema stesso, purchè realmente *tutti* i corpi considerati, e quindi anche l' etere, prendano parte al movimento. Resulta ancora da queste considerazioni, che anche se una sola parte del sistema in moto si muove come un corpo rigido, in quella parte i fenomeni sono gli stessi come nei corpi in quiete. Se dunque, ciò non pertanto, il movimento che ha luogo esercita un' azione su tal parte, tale azione può aver avuto origine soltanto in quella porzione del sistema nella quale si hanno deformazioni degli elementi e di là si deve esser secondariamente propagata a quella porzione, che si muove al modo dei corpi rigidi. Se per es. una massa metallica solida si sposta subitamente in un campo magnetico, secondo le nostre equazioni tal movimento immediatamente, cioè contemporaneamente, ha un' azione soltanto sulla superficie e all' intorno della massa metallica, ed ivi provoca delle forze elettriche, che poi in modo indiretto, cioè alquanto più tardi, si propagano nell'interno della massa, e vi producono delle correnti.

Le equazioni sopra stabilite, per la forma e per lo scopo sono affini di quelle, colle quali von Helmholtz nel 78° vol. del Giornale di Borchardt, rappresentò il contegno delle forze elettriche e magnetiche nei corpi in moto [1]). Le notazioni sono in parte tolte da quella Memoria. Tuttavia le nostre equazioni sono diverse da quelle ivi stabilite, non solo per la forma, ma ancor più pel contenuto, riguardo a certi termini, che finora non posson esser verificati coll' esperienza.

1) V. Helmholtz, *Ges. Abhandl.* 1 pag. 745, Borchardt's *Journ. f. Mathem.* 78, pag. 273, 1874.

Mi sembra che lo stesso Maxwell nel suo sistema abbia fatto astrazione da una serie importante di fenomeni nei corpi in moto. Le numerose considerazioni che egli dedica a tali fenomeni, si limitano a dei casi particolari, o si contentano di approssimazioni, che non rendono necessaria una differenza fra le teorie dell' azione a distanza e quelle dell' azione mediata.

2. *Significato fisico dei singoli termini.*

Le equazioni (1_a) e (1_b) ci dànno i valori pratici della polarizzazione in ogni punto solido dello spazio, o, se più ci piace, in ogni particella della materia in moto, come conseguenze univocamente determinate dello stato elettromagnetico attuale e del moto attuale dei punti prossimi a quello considerato. Tale è, secondo il concetto del nostro sistema, il loro significato fisico; mentre ordinariamente le relazioni espresse dalle medesime equazioni sono interpretate in modo del tutto diverso, perchè nelle velocità con cui la polarizzazione varia, e che sono espresse dai termini del 1° membro, si voglion veder le cause, e nelle forze indotte che sono espresse dal 2° membro, gli effetti. Questo modo di vedere è derivato dal fatto che le polarizzazioni e le loro variazioni ci si manifestano più facilmente e più presto delle forze che contemporaneamente si producono, e quindi i primi membri delle equazioni rispetto alle nostre cognizioni sono i primi a presentarsi. Anche questo modo di considerar le cose ha grandi vantaggi nei casi che più c' interessano; ma dal punto di vista generale ha la difficoltà che le forze non son determinate univocamente dalla velocità con cui variano le polarizzazioni di specie opposta, ma contengono delle costanti additive indipendenti da quelle variazioni. La teoria ordinaria si aiuta col contrapporre queste costanti, quali forze elettrostatiche o magnetiche, alle forze elettrodinamiche che secondo essa son determinate soltanto dalle nostre equazioni. Quantunque non approviamo tal separazione, e perciò non possiamo ammettere i concetti ordinari sulla dipendenza causale, non è tuttavia senza interesse di mostrare in qual modo le forze parziali, introdotte secondo la teoria ordinaria, son contenute nei singoli termini delle nostre equazioni. A tal fine scomponiamo le forze nella forma $X = X_1 + X_2 + \dots$

etc. $\mathrm{L} = \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 + \ldots$ etc. e poniamo

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{X}_1 = \mathrm{A}\,(\gamma\mathbf{M} - \beta\mathbf{N}) & \mathbf{L}_1 = \mathrm{A}\,(\beta\mathbf{Z} - \gamma\mathbf{Y}) \\ \mathrm{Y}_1 = \mathrm{A}\,(\alpha\mathbf{N} - \gamma\mathbf{L}) & \mathbf{M}_1 = \mathrm{A}\,(\gamma\mathbf{X} - \alpha\mathbf{Z}) \\ \mathrm{Z}_1 = \mathrm{A}\,(\beta\mathbf{L} - \alpha\mathbf{M}) & \mathbf{N}_1 = \mathrm{A}\,(\alpha\mathbf{Y} - \beta\mathbf{X}) \end{array} \right.$$

con che per le X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2, si ottengono delle equazioni, che si deducono dalle equazioni (1_a) e (1_b) che valgono per X, Y, Z, L, M, N lasciando il secondo e il terzo termine del primo membro. Ora notiamo intanto che la resultante delle X_1, Y_1, Z_1 è una forza elettrica, che si presenta a pena un corpo si muove in un campo magnetico. Essa è perpendicolare alla direzione del moto e a quella delle linee magnetiche di forza, ed è quella forza, che in senso ristretto si suol chiamare forza elettromotrice indotta dal moto. Facciamo osservare, che la sua separazione dalla forza totale, secondo il nostro concetto non può avere alcun significato fisico, perchè noi non ammettiamo che il campo magnetico possa come tale avere, nell'interno di un corpo, un moto relativamente al medesimo corpo. Corrispondente alla forza X_1, Y_1, Z_1 è la forza L_1, M_1, N_1 che si deve rendere evidente in un coibente, a pena esso si muova attraversando le linee di forza di un campo elettrico; essa non è stata ancora costatata sperimentalmente, e manca nella vecchia elettrodinamica.

Rivolgiamo inoltre la nostra attenzione alla resultante delle L_2, M_2, N_2 e a questo scopo rappresentiamoci le soluzioni generali delle equazioni, che valgono per tali quantità, come soluzioni delle u, $d\mathbf{X}/dt$, $\alpha(d\mathbf{X}/dx + d\mathbf{Y}/dy + d\mathbf{Z}/dz)$ etc. Se poniamo tutte queste ultime quantità uguali a zero in quelle funzioni, rimane una prima parte della forza, che non deriva da cause elettrodinamiche. Le sue componenti posseggono necessariamente un potenziale, che rappresenta quella forza a distanza che, secondo gli antichi concetti, è esercitata dalle masse magnetiche. Una seconda parte della forza è data da quella parte delle funzioni che si annulla con u, v, w e soltanto per l'annullarsi di queste. Essa contiene la forza magnetica a distanza, che sembra dovuta propriamente alle correnti elettriche. Si ottiene la

intera parte elettrodinamica della forza L_2, M_2, N_2 se nell'espressione della seconda parte alle quantità $4\pi Au$ si sostituiscono le altre

$$4\pi Au + A\frac{d\mathbf{X}}{dt} + A\alpha\left(\frac{d\mathbf{X}}{dx} + \frac{d\mathbf{Y}}{dy} + \frac{d\mathbf{Z}}{dz}\right)$$

e analogamente per le v, w. Ciò equivale a dire che, per quanto riguarda la generazione di una forza magnetica a distanza, si deve considerare come equivalente ad una corrente elettrica, da prima la variazione della polarizzazione elettrica, e poi il moto convettivo dell' elettricità vera. L' ultima parte di questa proposizione trova la sua conferma nelle esperienze di Rowland.

Consideriamo finalmente la forza X_2, Y_2, Z_2. Anche da questa forza si può da prima separare una parte indipendente dalle variazioni istantanee del sistema, che possiede un potenziale e che è ritenuta come forza elettrostatica a distanza. Dalla rimanente forza elettrodinamica si può separare una seconda parte, che si annulla insieme e soltanto con le $d\mathbf{L}/dt$, $d\mathbf{M}/dt$, $d\mathbf{N}/dt$. Essa rappresenta evidentemente la forza d'induzione che è prodotta dalla variazione dei momenti magnetici, ma contiene implicitamente anche quella forza elettrica che è dovuta alle correnti variabili. Resta finalmente una terza ed ultima parte, che si ritiene come una forza elettrica dovuta al moto convettivo del magnetismo, e che deve invocarsi per la spiegazione di alcuni fenomeni dell' induzione unipolare.

Queste considerazioni mostrano che si sarebbe potuto ottenere il sistema di equazioni (1_a) e (1_b) anche sommando l'azione delle singole forze indicate dalle antiche teorie, e aggiungendo una serie di termini ipotetici, che colle esperienze conosciute non si possono nè confermare nè rigettare. La via che abbiamo seguito rende necessario un minor numero di ipotesi indipendenti. Vediamo ora di dedurre dalle nostre equazioni le più importanti conseguenze.

3. *Moto dei magneti, e dei corpi carichi elettrostaticamente.*

Quali cause indipendenti per le variazioni della polarizzazione elettrica e magnetica nel nostro concetto si presentano da

prima le forze magnetiche ed elettriche respettivamente, in secondo luogo il moto dei corpi materiali. La prima causa sola, secondo quanto si è stabilito per i corpi in quiete, non produce alcuno spostamento dell' elettricità vera [1]) nei coibenti e nemmeno alcuno spostamento del magnetismo vero. L'altra causa produce di per sè uno spostamento dell' elettricità e del magnetismo rispetto allo spazio in quiete, ma non può produrre alcuno spostamento rispetto alla materia in moto, perchè questa materia nel muoversi porta con sè le linee di forza, le cui estremità libere posson considerarsi come elettricità e magnetismo veri. Dunque allorchè le due cause agiscono insieme, viene così escluso tanto per il magnetismo vero in generale, quanto per l' elettricità vera almeno nei coibenti, ogni movimento rispetto alla materia circostante. Nelle circostanze indicate, l' elettricità e il magnetismo si muovono con la materia, nella quale si trovano, come se fossero rigidamente e indissolubilmente unite alle di lei particelle. Per tradurre in formule tali considerazioni, differenziamo una volta le equazioni (1_a), e una volta le (1_b) rispetto a x, y, z e moltiplichiamole per l' elemento $d\tau$ di spazio ritenuto in quiete, al quale si riferiscono le $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$, ... Indichiamo anche con $d\tau'$ un elemento di spazio, che in ogni tempo circonda la materia contenuta nell' elemento $d\tau$ nell' istante considerato, con de' e con dm' la quantità di elettricità e di magnetismo veri respettivamente contenuto in $d\tau'$, e con $\mathbf{L}'$, $\mathbf{M}'$ .... i valori di $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ .... relativi a $d\tau'$. Otteniamo così:

$$
(3_a)\begin{cases}
\Big[\frac{d}{dt}\Big(\frac{d\mathbf{L}}{dx}+\frac{d\mathbf{M}}{dy}+\frac{d\mathbf{N}}{dz}\Big)+\alpha\frac{d}{dx}\Big(\frac{d\mathbf{L}}{dx}+\frac{d\mathbf{M}}{dy}+\frac{d\mathbf{N}}{dz}\Big) \\
\quad +\beta\frac{d}{dy}\Big(\frac{d\mathbf{L}}{dx}+\frac{d\mathbf{M}}{dy}+\frac{d\mathbf{N}}{dz}\Big)+\gamma\frac{d}{dz}\Big(\frac{d\mathbf{L}}{dx}+\frac{d\mathbf{M}}{dy}+\frac{d\mathbf{N}}{dz}\Big) \\
\quad +\Big(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\Big)\Big(\frac{d\mathbf{L}}{dx}+\frac{d\mathbf{M}}{dy}+\frac{d\mathbf{N}}{dz}\Big)\Big]d\tau \\
\qquad\qquad -\frac{d}{dt}\Big[\Big(\frac{d\mathbf{L}'}{dx}+\frac{d\mathbf{M}'}{dy}+\frac{d\mathbf{N}'}{dz}\Big)d\tau'\Big]=4\pi\frac{dm'}{dt}=0
\end{cases}
$$

1) Rammentiamo che è l' espressione $1/4\pi\,(d\mathbf{X}/dx+d\mathbf{Y}/dy+d\mathbf{Z}/dz)\,d\tau$ che si chiama l' elettricità vera dell' elemento $d\tau$, e che si chiama elettricità libera l'espressione $1/4\pi\,(dX/dx+dY/dy+dZ/dz)\,d\tau$. Analogamente si ha pel magnetismo.

$$(3_b)\left\{\begin{aligned}&\Big[\frac{d}{dt}\Big(\frac{d\mathbf{X}}{dx}+\frac{d\mathbf{Y}}{dy}+\frac{d\mathbf{Z}}{dz}\Big)+\alpha\frac{d}{dx}\Big(\frac{d\mathbf{X}}{dx}+\frac{d\mathbf{Y}}{dy}+\frac{d\mathbf{Z}}{dz}\Big)\\&+\beta\frac{d}{dy}\Big(\frac{d\mathbf{X}}{dx}+\frac{d\mathbf{Y}}{dy}+\frac{d\mathbf{Z}}{dz}\Big)+\gamma\frac{d}{dz}\Big(\frac{d\mathbf{X}}{dx}+\frac{d\mathbf{Y}}{dy}+\frac{d\mathbf{Z}}{dz}\Big)\\&\quad+\Big(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\Big)\Big(\frac{d\mathbf{X}}{dx}+\frac{d\mathbf{Y}}{dy}+\frac{d\mathbf{Z}}{dz}\Big)\Big]d\tau\\&\quad=\frac{d}{dt}\Big[\Big(\frac{d\mathbf{X}'}{dx}+\frac{d\mathbf{Y}'}{dy}+\frac{d\mathbf{Z}'}{dz}\Big)d\tau'\Big]=4\pi\frac{de'}{dt}\\&\qquad\qquad\qquad=4\pi\Big(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\Big)\,.\end{aligned}\right.$$

Queste equazioni esprimono il nostro concetto e lo completano per quanto si riferisce ai conduttori. Se le velocità α, β, γ sono così piccole che ad ogni istante lo stato elettrico e quello magnetico possano restare infinitamente prossimi allo stato statico, e se ci limitiamo a considerare tale stato quasi-statico, la proposizione cui siamo giunti è non solo sufficiente, ma anche necessaria per determinare separatamente la dipendenza degli stati trasformabili l'uno nell'altro. L'introduzione di tal proposizione permette di sostituire alle equazioni complete, ma molto complicate, (1_a) e (1_b), le altre equazioni equivalenti, ma molto semplici, che valgono per il problema statico nei corpi in quiete, e che si deducono dalle (1_a) e (1_b) col porre uguale a zero le velocità e le variazioni istantanee in tutti i punti dello spazio. Senza introdurre il concetto dell'elettricità e del magnetismo veri, non è possibile l'anzidetta semplicizzazione, e da qui principalmente mi pare che derivi se questi concetti son divenuti indispensabili per l'elettrostatica e per la descrizione dei fenomeni magnetici.

4. *Induzione nei circuiti chiusi.*

Le maggiori velocità, che noi possiamo comunicare ai corpi che ci circondano, sono così piccole di fronte alla velocità della luce, colla cui reciproca son moltiplicate le α, β, γ che compariscono nelle (1_a) e (1_b), che le azioni elettrodinamiche del moto ci sono accessibili soltanto nel caso che tali azioni consistano

nell'induzione di una corrente elettrica in un circuito metallico chiuso. Per determinar la grandezza di tali azioni nei circuiti chiusi, prendiamo a considerare un elemento di superficie ω' non chiuso, che, situato nell'interno della materia studiata, si sposti colle particelle materiali in moto, per le quali si è condotto. Sia s la curva che limita ad ogni istante questo elemento, e sia ζ' il numero delle linee di forza magnetiche, che lo attraversano in un istante qualunque. Come cause agenti fra loro indipendenti che producono una variazione in ζ' noi assumiamo di nuovo: da prima le forze elettriche, in secondo luogo il moto della materia. Se agisse la sola prima causa, se cioè il sistema fosse in riposo, la variazione della velocità di ζ', moltiplicata per A, sarebbe uguale all'integrale della forza elettrica esteso a tutto il contorno s, prendendo l'integrale in un senso, che veduto dalla parte della normale positiva, corrisponda a quello della rotazione degli indici dell'orologio. Se agisse il moto soltanto non si avrebbe alcuna variazione in ζ', poichè le linee di forza che attraversano la superficie ω' si muovono con tal superficie. Anche nel caso reale in cui le due cause agiscono insieme, l'integrale della forza elettrica presa nel senso anzi detto lungo la curva chiusa arbitraria s è dunque uguale alla velocità della variazione del numero delle linee di forza magnetiche, moltiplicato per A, che attraversano una superficie ω', limitata inizialmente dalla curva s, che segue il movimento, ma che del resto è arbitraria. Questo teorema vale anche pel caso speciale, e che è il solo accessibile alle esperienze, in cui la curva s segua il circuito di un conduttore lineare, e non cessa di valere pel fatto che il moto è lento assai da lasciar ritenere gli stati continuamente stazionari e la corrente che ne resulta uniforme in tutte le parti del circuito s.

Per tradurre in formule le nostre considerazioni, chiamiamo n',x'; n',y'; n',z' gli angoli che in ogni istante la normale dell'elemento $d\omega'$ della superficie ω' fa cogli assi. Sieno $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}'$ i valori di $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ in quell'elemento; e siano $d\omega$, n,x, n,y, n,z i valori iniziali di $d\omega'$, n',x, n',y, n',z. Si rammenti che per ragioni puramente geometriche si ha:

$$\frac{d}{dt}(d\omega'\cos n',x) = d\omega\left[\left(\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)\cos n,x - \frac{d\beta}{dx}\cos n,y - \frac{d\gamma}{dx}\cos n,z\right]$$

$$\frac{d}{dt}(d\omega'\cos n',y) = d\omega\left[-\frac{d\alpha}{dy}\cos n,x + \left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\gamma}{dz}\right)\cos n,y - \frac{d\gamma}{dy}\cos n,z\right]$$

$$\frac{d}{dt}(d\omega'\cos n',z) = d\omega\left[-\frac{d\alpha}{dz}\cos n,x - \frac{d\beta}{dz}\cos n,y - \left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}\right)\cos n,z\right]$$

e si ha così:

$$\frac{d\zeta'}{dt} = \frac{d}{dt}\int(\mathbf{L}'\cos n',x + \mathbf{M}'\cos n',y + \mathbf{N}'\cos n',z)\,d\omega'$$

$$= \int\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \alpha\frac{d\mathbf{L}}{dx} + \beta\frac{d\mathbf{L}}{dy} + \frac{d\mathbf{L}}{dz}\right)\cos n,x\,d\omega$$

$$+ \int\left(\frac{d\mathbf{M}}{dt} + \alpha\frac{d\mathbf{M}}{dx} + \beta\frac{d\mathbf{M}}{dy} + \gamma\frac{d\mathbf{M}}{dz}\right)\cos n,y\,d\omega$$

$$+ \int\left(\frac{d\mathbf{N}}{dt} + \alpha\frac{d\mathbf{N}}{dx} + \beta\frac{d\mathbf{N}}{dy} + \gamma\frac{d\mathbf{N}}{dz}\right)\cos n,z\,d\omega$$

$$+ \int\mathbf{L}\left(\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)\cos n,x\,d\omega - \int\mathbf{L}\frac{d\beta}{dx}\cos n,y\,d\omega$$

$$- \int\mathbf{L}\frac{d\gamma}{dx}\cos n,z\,d\omega - \int\mathbf{M}\frac{d\alpha}{dy}\cos n,x\,d\omega$$

$$+ \int\mathbf{M}\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\gamma}{dz}\right)\cos n,y\,d\omega - \int\mathbf{M}\frac{d\gamma}{dy}\cos n,z\,d\omega$$

$$- \int\mathbf{N}\frac{d\alpha}{dz}\cos n,x\,d\omega - \int\mathbf{N}\frac{d\beta}{dz}\cos n,y\,d\omega$$

$$+ \int\mathbf{N}\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}\right)\cos n,z\,d\omega\;;$$

e quindi, servendoci delle equazioni (1_a) e (1_b)

$$A\frac{d\zeta'}{dt} = \int\left[\left(\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right)\cos n,x + \left(\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}\right)\cos n,y + \left(\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}\right)\cos n,z\right]d\omega = \int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

l' ultimo integrale essendo esteso al contorno s della superficie ω.

La proposizione dimostrata si semplicizza in casi particolari. Se è possibile di limitare uno spazio semplicemente connesso, che contenga tutta la curva s che si muove, e nel quale non si trovi magnetismo vero, è evidentemente senza influenza alcuna che la superficie ausiliaria ω' segua il moto delle parti materiali o che abbia uno spostamento da esse indipendenti, purchè essa superficie sia contenuta sempre entro quello spazio e rimanga limitata dalla curva s. In questo caso potremo dire, più semplicemente, e pur senza ambiguità: che l' integrale della forza elettrica preso lungo la curva chiusa s è uguale al prodotto di A per la velocità con cui varia il numero delle linee di forza magnetiche, che sono racchiuse entro la curva s. Se manteniamo l' ipotesi fatta, e se, per di più, malgrado il moto di s la polarizzazione magnetica riman costante in ogni punto dello spazio, potremo dire che la forza indotta nella curva s è uguale al prodotto di A per il numero delle linee di forza magnetiche contenute nello spazio e supposte ferme, che sono attraversate dalla curva s quando si muove in un senso determinato. Se le forze magnetiche, sotto la cui influenza la curva s si muove, sono unicamente dovute all' azione della corrente uniforme che circola in un circuito t, il numero delle linee di forza che attraversano la s, è uguale, come vedemmo [1]), al prodotto della intensità della corrente in t pel potenziale di Neumann della curva s sulla curva t. In questo caso adunque, la variazione del prodotto anzidetto, riferita all' unità di tempo, moltiplicata per A, è uguale alla forza elettromotrice agente in s.

Nell' una o nell' altra forma, queste proposizioni contengono tutti i casi noti e accuratamente studiati dell' induzione. Anche le leggi dell' induzione unipolare si posson derivare dal teorema generale. I fenomeni d' induzione nei corpi a tre dimensioni sono stati studiati, quantitativamente, in modo molto ristretto. Le equazioni con le quali Jochmann [2]) e altri poterono rappresentare l' insieme dei fatti osservati, si ottengono immediatamente

1) H. Hertz, *l. c.* p. 614.
2) Jochmann, Crelle's *Journ.* 63, p. 1, 1863.

dalle nostre equazioni generali, trascurando una serie di termini che, per la natura del problema considerato, si annullano.

Non vogliamo lasciar di notare che potremmo dare una forma assai elegante e più estesa al teorema generale dell'induzione, se ci permettessimo di attribuire un moto proprio alle linee di forza, e se ogni variazione della polarizzazione magnetica si potesse ritenere come una conseguenza di un tal moto delle linee di forza. Potremmo allora dire in generale: la forza elettrica indotta in una curva chiusa s qualunque è uguale al numero delle linee di forza magnetiche, che attraversano nell'unità di tempo la curva s in un senso determinato, moltiplicato per A. Tuttavia, quantunque non ci sia nulla da obiettare contro l'opportunità di usare il modo di vedere che abbiamo posto a fondamento di questo enunciato, riteniamo che sia meglio non servircene in questa Memoria.

Poichè il concetto già usato da Faraday, e sviluppato da Poynting [1]), che le linee di forza possano avere un moto relativamente al mezzo ambiente, è in vero meritevole di essere considerato, e può anche adottarsi; ma è affatto diverso dal concetto qui adoperato, secondo il quale le linee di forza sono soltanto un simbolo per rappresentarci uno stato speciale della materia. Non vi è alcun senso, nel dire che un tale stato ha un movimento proprio. Ed è anche da notarsi che l'aumento o la diminuzione delle linee di forza che si può costatare in tutte le parti dello spazio, non serve a determinare univocamente il moto anzidetto delle linee stesse. La proposizione sopra esposta non darebbe quindi, di per se sola, in modo unico e determinato, la grandezza dell'induzione in tutti i casi; ma più tosto sarebbe da ritenersi come una definizione, per mezzo della quale fra i movimenti possibili delle linee di forza, uno determinato di essi si potesse indicare quale quello che effettivamente ha luogo.

5. *Delle superficie di scorrimento.*

Alla superficie di separazione di due corpi eterogenei, le costanti elettrodinamiche possono passare in modo discontinuo

1) J. H. Poynting, *Phil. Trans.* 2, p. 277, 1885.

da un valore a un altro, senza che per questo le componenti α, β, γ della velocità presentino a tal superficie delle variazioni discontinue. Come superficie di discontinuità di questa specie devon considerarsi le superficie di contatto fra solidi e liquidi, o fra un fluido e un altro; e siamo anche liberi di presupporre che tal proprietà appartenga al passaggio dai corpi ordinari all'etere. Il presentarsi di un movimento continuo a tali superficie di discontinuità, non dà luogo ad alcuna nuova considerazione; gli stati delle particelle materiali dalle due parti della superficie sono legati fra loro dalle stesse relazioni che valgono per i corpi in quiete.

Altra cosa avviene per le superficie, alle quali anche le componenti della velocità subiscono variazioni discontinue. Poichè, secondo un'osservazione fatta nell'introduzione, la discontinuità può presentarsi soltanto per le componenti della velocità parallele alla superficie di separazione, così le superficie di tale specie le indicheremo col nome di superficie di scorrimento. Esse possono trovarsi fra corpi solidi, che si toccano; ed è anche talora comodo, e per la nostra ignoranza della vera natura di questi fenomeni è anche permesso, di considerare come superficie di scorrimento quella di separazione fra un corpo qualunque e l'etere. Come già abbiamo osservato nell'introduzione, una superficie di scorrimento la riterremo come caso limite di uno strato di passaggio, nel quale i movimenti e possibilmente anche le costanti elettrodinamiche passano da un valore a un altro con molta rapidità sì, ma sempre in modo continuo. Questa osservazione ci fa sicuri che le proposizioni generali, che abbiamo dedotto fin quì, non perdono di validità in un sistema, nel quale si trovino superficie di scorrimento, e trova la sua conferma in questo, che non conduce a contradizioni coi fatti sperimentali.

Affinchè essa sia sufficiente a determinare le relazioni che valgono alle superficie di scorrimento, la maniera del passaggio al limite deve sottoporsi ad alcune restrizioni generali, le quali consistono nel supporre che una serie di grandezze resti finita anche nello stesso strato di passaggio. Faremo astrazione dall'esistenza di forze elettromotrici nelle superficie di scorrimento. Porremo l'origine del sistema coordinato, al quale ci riferiremo, in un punto arbitrario dell'elemento dello strato di passaggio che

si considera, e faremo che questo punto lo segua nel suo moto. Daremo inoltre all' asse delle z una tal direzione, che sia perpendicolare all' elemento della superficie di scorrimento, e che rimanga ad esso perpendicolare anche durante il moto. In tal modo lo strato di passaggio forma sempre l' intorno immediato del piano $x\ y$. Ammetteremo che anche nello strato di passaggio, le grandezze

$$\begin{matrix} X & Y & Z & & L & M & N \\ \mathbf{X} & \mathbf{Y} & \mathbf{Z} & & \mathbf{L} & \mathbf{M} & \mathbf{N} \\ u & v & w & & \alpha & \beta & \gamma \end{matrix}$$

rimangano finite, insieme alle loro derivate prese parallelamente alla superficie di scorrimento, e perciò rispetto a x e a y, e insieme alle derivate di

$$\mathbf{X} \quad \mathbf{Y} \quad \mathbf{Z} \qquad \mathbf{L} \quad \mathbf{M} \quad \mathbf{N}$$

rispetto al tempo t. Invece non possiamo escludere che le derivate rispetto a z divengano infinite, ad eccezione di $d\gamma / dz$, la quale, per la rammentata osservazione fatta nell' introduzione, deve rimaner finita. La stessa componente γ è perciò in generale infinitesima nello strato di passaggio. Ciò premesso, moltiplichiamo le prime due equazioni del sistema (1_a) e (1_b) per dz, integriamole rispetto a z a traverso lo strato di passaggio fra due punti estremamente vicini di esso, e notiamo che per la piccolezza del tratto d' integrazione l' integrale di ogni grandezza che riman finita in quello strato si annulla. Così otteniamo, attribuendo l' indice 1 a una parte e l' indice 2 all' altra parte della superficie di separazione, le equazioni:

$$(5_a) \qquad A\int_1^2 \mathbf{N}\,\frac{d\alpha}{dz}\,dz = Y_2 - Y_1\,, \qquad -A\int_1^2 \mathbf{N}\,\frac{d\beta}{dz}\,dz = X_2 - X_1$$

$$(5_b) \qquad -A\int_1^2 \mathbf{Z}\,\frac{d\alpha}{dz}\,dz = M_2 - M_1\,, \qquad A\int_1^2 \mathbf{Z}\,\frac{d\beta}{dz}\,dz = L_2 - L_1\,.$$

Queste danno il modo con cui per le componenti della forza, tangenzialmente alla superficie di scorrimento, si passa da una parte all' altra della superficie stessa. Le componenti normali alla superficie di separazione sono qui, come nei corpi in quiete, legate fra loro dalla condizione, che la densità superficiale del magnetismo effettivo sulla superficie stessa non possa variare altro che per convezione, e la densità superficiale dell' elettricità altro che o per convezione o per una corrente propria.

Se l'elemento considerato dello strato di separazione è privo di elettricità e di magnetismo, la $\mathbf{Z}$ e la $\mathbf{N}$ sono costanti nell' interno dello strato di passaggio, e le equazioni (5_a) e (5_b) prendon la forma più semplice:

$$(5_c) \quad X_2 - X_1 = A\mathbf{N}(\beta_1 - \beta_2), \qquad Y_2 - Y_1 = A\mathbf{N}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$(5_d) \quad L_2 - L_1 = A\mathbf{Z}(\beta_2 - \beta_1), \qquad M_2 - M_1 = A\mathbf{Z}(\alpha_1 - \alpha_1):$$

Per dare un esempio, nel quale queste equazioni sieno applicate, supponiamo che un corpo solido di rotazione ruoti attorno al suo asse in una cavità che lo racchiude assai da vicino formata da un altro corpo solido. Se questo sistema è sottoposto all' azione di una distribuzione di forze magnetiche, che è simmetrica rispetto all' asse di rotazione, secondo quanto si è esposto non è possibile la penetrazione di forze elettriche nè entro il corpo ruotante, nè entro la massa del corpo che lo circonda. Quelle forze in fatti non si presentano se la eccitazione magnetica si limita tutta all' interno dell' uno o dell' altro corpo. Ma se le linee di forza attraversano la superficie, secondo la quale i due corpi scorrono l' uno sull' altro, si destano su tal superficie le forze elettromotrici date dalle (5_c), che si propagano nell' interno del corpo ed ivi sviluppano le tensioni elettriche e le correnti, sul cui effettivo presentarsi nelle indicate circostanze l' esperienza non ci lascia alcun dubbio. Se i corpi considerati son coibenti e li sottoponiamo all' azione di forze elettriche, che son distribuite simmetricamente rispetto all' asse di rotazione, e che non si annullano sulla superficie di scorrimento, allora il movimento stesso in seguito alle (5_d) provoca nell' intorno le forze magnetiche. Tali azioni non sono state finora costatate

colla stessa sicurezza delle precedenti, ma si ha un accenno ad esse nelle ricerche del Röntgen [1]).

Nel caso generale, in cui alla superficie di separazione si ha una carica di elettricità e di magnetismo, la sola cognizione della loro densità superficiale non basta per trovare gl'integrali delle (5_a) e (5_b); deve anche esser noto in qual misura nello strato di passaggio l'elettricità e il magnetismo prendon parte al moto dell'uno e dell'altro corpo che si toccano. Tale indeterminatezza è affatto dovuta alla natura delle cose. Nelle ricerche di Rowland sull'azione magnetica del moto convettivo dell'elettricità si supponga che il disco elettrizzato rotante si trovi anzi che nell'aria in un isolatore solido che lo circondi strettamente. L'azione magnetica diminuirebbe evidentemente fino ad annullarsi, nella stessa misura con la quale l'elettricità passasse dalla superficie del disco rotante alla superficie del corpo in quiete con la quale è a contatto.

6. *Conservazione dell' energia. - Forze ponderomotrici.*

Scomponiamo in due stadii il passaggio del sistema dallo stato iniziale allo stato finale in ciascun elemento di tempo. Il primo stadio condurrà l'insieme delle particelle materiali dallo stato iniziale a quello finale e con ciò le linee di forza seguiranno il moto delle particelle stesse. Nel secondo stadio avverrà l'azione delle forze elettriche e magnetiche che ormai son presenti, e condurrà anche gli stati elettromagnetici nella loro condizione finale. La variazione che subisce l'energia elettromagnetica del sistema durante l'intero passaggio, è la somma delle variazioni che esso risente nei due stadi sopra detti. I processi del secondo stadio avvengono nei corpi in quiete; e noi già sappiamo in qual modo in tali processi le variazioni dell'energia elettromagnetica sono compensate con altre forme dell'energia. Ma durante il primo stadio cambia l'energia elettromagnetica di ciascuna particella del sistema. Resta dunque da render conto di ciò che avanza di tale energia così diminuita, o dell'origine di quella che possa trovarsi in aumento. Per l'insieme delle

1) W. C. Röntgen, *Wied. Ann.* 35, pag. 264, 1888.

esperienze conosciute si può dimostrare senza alcuna incertezza l'affermazione che in ogni sistema elettromagnetico completo l'energia di cui si parla è compensata dal lavoro meccanico che è eseguito, durante l'elemento di tempo che si considera, dalle forze elettriche e magnetiche ponderomotrici del sistema. Ma presa come valida in generale tale affermazione non basta per dedurre sempre e con rigore le forze ponderomotrici dalle variazioni calcolabili dell'energia elettromagnetica. Perciò ad essa aggiungeremo due ipotesi, che non sono in contradizione con la medesima, e le quali ci vengon suggerite non dall'esperienza, ma dal nostro modo speciale di considerar queste cose. La prima ipotesi consiste nell'estendere l'indicata affermazione, che per ogni sistema elettromagnetico completo è confermata dall'esperienza, anche ad una parte qualunque del sistema. La seconda ipotesi è, che una parte qualunque del sistema non può esercitare sul rimanente sistema altre forze ponderomotrici, all'infuori delle pressioni che sono esercitate alla superficie comune dagli elementi della prima parte su quelli della seconda coi quali sono a contatto, e le quali in ogni punto della superficie di contatto dipendono soltanto dallo stato elettromagnetico dei punti immediatamente vicini. La prima ipotesi serve a determinare univocamente le pressioni ammesse colla seconda; noi dedurremo il valore di queste pressioni, e mostreremo che esse bastano per spiegare i fatti che cadono sotto i nostri sensi. Che il principio della conservazione dell'energia vale quindi anche pei corpi in moto, resulta dal modo stesso di dedurre quelle pressioni.

Consideriamo durante l'elemento di tempo dt l'energia magnetica di una particella del sistema, il cui volume variabile sia indicato con $d\tau'$, mentre con $d\tau$ indicheremo il valore di $d\tau'$ al principio dell'elemento di tempo dt. Per semplicizzare, l'origine del sistema coordinato cui ci riferiamo sia sempre in uno dei punti materiali di $d\tau'$. Se $d\tau'$ si muovesse come un corpo rigido, conducendo seco le linee di forza, la quantità d'energia da esso posseduta non varierebbe. Dunque la variazione di questa energia deve esser unicamente funzione delle deformazioni che subisce $d\tau'$ per effetto del movimento; e il nostro problema consisterà da prima nel rappresentarci in questa forma tal va-

riazione. Ma in seguito delle deformazioni cambiano non soltanto le polarizzazioni, ma anche le proprietà delle particelle materiali in cui esse risiedono, e quindi anche le costanti magnetiche. Per poter introdurre nel calcolo tali variazioni, dobbiamo usare una serie di nuove notazioni. In primo luogo definiremo, a lato della costante μ, una serie di costanti μ' determinate in modo che debba essere:

$$\mathbf{L}\mathrm{L} + \mathbf{M}\mathrm{M} + \mathbf{N}\mathrm{N}$$
$$= \mu_{11}\, \mathrm{L}^2 + 2\mu_{12}\, \mathrm{L}\,\mathrm{M} + \text{etc.}$$
$$= \mu'_{11}\, \mathbf{L}^2 + 2\mu'_{12}\, \mathbf{L}\mathbf{M} + \text{etc.}$$

Le μ' sono cioè i coefficienti delle $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ nelle funzioni lineari di tali grandezze colle quali si rappresentano le forze.

Chiameremo di poi ξ, η, ζ gli spostamenti che nell'istante considerato subisce il punto le cui velocità sono α, β, γ dalla posizione che occupava al principio del tempo dt.

Perciò le quantità

$$\frac{d\xi}{dx} = x_x\,, \qquad \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} = x_y\,, \text{ etc. [1]}$$

sono le componenti delle deformazioni dell'elemento $d\tau'$, nel quale avvengono gli spostamenti ξ, η, ζ. Le costanti μ' son funzioni di queste quantità, e dipendono anche dalle rotazioni ρ, σ, τ che la deformazione produce sull'elemento. Poichè, durante il tempo dt, tanto le x_x, x_y, etc. quanto le ρ, σ, τ restano infinitesime, tal dipendenza è lineare, e ci sarà nota appena ci sian date le derivate delle μ' rispetto alle ρ, σ, τ, x_x, x_y etc. Le derivate rispetto alle ρ, σ, τ si possono ottenere dai valori istantanei delle μ' stesse. Per le derivate rispetto alle x_x, x_y, etc. non vale però altrettanto; e dobbiamo quindi ammettere che in altro modo ci sien date le quantità

$$\frac{d\mu'_{11}}{dx_x} = \mu'_{11\cdot 11} \quad \frac{d\mu'_{11}}{dx_y} = \mu'_{11\cdot 12}\,, \text{ etc.}$$
$$\frac{d\mu'_{12}}{dx_x} = \mu'_{12\cdot 11}\,, \quad \frac{d\mu'_{12}}{dx_y} = \mu'_{12\cdot 12} \text{ etc.}$$

1) Cfr. G. Kirchhoff, *Mechanik*, pag. 123, 1877.

Le 36 costanti così definite corrispondono evidentemente a proprietà magnetiche della sostanza particolare che riempie lo spazio $d\tau'$ nel suo stato istantaneo della deformazione; di nessuna di queste costanti possiamo di nostro arbitrio fare a meno, come non possiamo dedurre a priori i valori di nessuna di esse dalle proprietà magnetiche fin qui conosciute della materia. Orientando opportunamente il sistema coordinato si può diminuire il numero di quelle costanti; e una diminuzione si ha pure se vi ha certa simmetria rispetto al sistema di assi. Nel caso più semplice, nel quale la sostanza inizialmente isotropa, resta isotropa non ostante qualunque deformazione che subisca, per es. nel caso dei liquidi, il numero delle nuove costanti si riduce ad una sola, la quale allora, insieme a una costante di magnetizzazione, è sufficiente a definirne le proprietà magnetiche. Sembra inoltre non improbabile, che anche nel caso generale si possano dimostrare delle relazioni necessarie fra le costanti, le quali permettano di ridurre ad un numero minore le costanti indipendenti.

Premesse tali notazioni, per la variazione che nell' unità di tempo subisce la quantità di magnetismo contenuta nello spazio $d\tau'$, si hanno successivamente le espressioni:

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{8\pi}(\mathbf{L}L+\mathbf{M}M+\mathbf{N}N)\,d\tau'\right]\\
&=\frac{1}{8\pi}\left[d\tau\,\frac{d}{dt}\,(\mu'_{11}\,\mathbf{L}^2+2\mu'_{12}\,\mathbf{L}\mathbf{M}+\text{etc...})\right.\\
&\left.+(\mathbf{L}L+\mathbf{M}M+\mathbf{N}N)\,\frac{d}{dt}d\tau'\right]\\
&=\frac{1}{8\pi}\,d\tau\left[\,2\left(L\,\frac{d\mathbf{L}}{dt}+M\,\frac{d\mathbf{M}}{dt}+N\,\frac{d\mathbf{N}}{dt}\right)\right.\\
&+\left(\frac{d\mu'_{11}}{dt}\,\mathbf{L}^2+2\,\frac{d\mu'_{12}}{dt}\,\mathbf{L}\mathbf{M}+\text{etc.....}\right)\\
&\left.+(\mathbf{L}L+\mathbf{M}M+\mathbf{N}N)\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)\right]
\end{aligned}
\right.
$$

Facciamo sparire nell' ultima di queste le derivate rispetto a t. Per le $d\mathbf{L}/dt$, $d\mathbf{M}/dt$, $d\mathbf{N}/dt$, le equazioni (1_a), considerandovi soltanto

l'azione del moto e per la scelta speciale del sistema di assi ponendovi uguali a zero le componenti α, β, γ della velocità, ci dànno:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -\mathbf{L}\left(\frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right) + \mathbf{M}\frac{d\alpha}{dy} + \mathbf{N}\frac{d\alpha}{dz},$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\mathbf{M}\left(\frac{d\gamma}{dz} + \frac{d\alpha}{dx}\right) + \mathbf{N}\frac{d\beta}{dz} + \mathbf{L}\frac{d\beta}{dx},$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = -\mathbf{N}\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\right) + \mathbf{L}\frac{d\gamma}{dx} + \mathbf{M}\frac{d\gamma}{dy}.$$

Inoltre si ha:

$$\frac{d\mu'_{11}}{dt} = \frac{d\mu'_{11}}{dx_x} \cdot \frac{dx_x}{dt} + \frac{d\mu'_{11}}{dx_y} \cdot \frac{dx_y}{dt} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{d\mu'_{11}}{d\rho}\frac{d\rho}{dt} + \text{etc.}$$

$$= \mu'_{11 \cdot 11}\frac{d\alpha}{dx} + \mu'_{11 \cdot 12}\left(\frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx}\right) + \text{etc.}$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{d\mu'_{11}}{d\rho}\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right) + \text{etc.}$$

Espressioni analoghe si hanno per $d\mu'_{12} / dt$, etc. Ponendo tutte queste espressioni nel secondo membro della (6), esso diviene una funzione lineare omogenea delle nove derivate di α, β γ rispetto alle x, y, z. Ma noi ordineremo questa funzione, in modo che ci apparisca come una funzione lineare omogenea delle 6 velocità di deformazione $\frac{d\alpha}{dx}$, $\frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx}$ etc. e delle 3 velocità di rotazione $^1/_2$ $(d\alpha / dy - d\beta / dx)$, etc. Notiamo inoltre, che i coefficienti delle tre velocità di rotazione devono essere identicamente nulli, poichè un moto della particella come corpo rigido non produce alcuna variazione nella quantità d'energia che possiede. Per conseguenza trascureremo i termini affetti da queste velocità di rotazione, e otterremo, come resultato finale, riducendo il tutto all'unità di volume col dividere per $d\tau$:

$$\frac{1}{d\tau}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{8\pi}(\mathbf{L}L+\mathbf{M}M+\mathbf{N}N)\,d\tau'\right]$$

$$=\frac{1}{8\pi}\frac{d\alpha}{dx}(\mathbf{L}L-\mathbf{M}M-\mathbf{N}N+\mu'_{11,11}\mathbf{L}^2+2\mu'_{12,11}\mathbf{LM}+\text{etc.})$$

$$+\frac{1}{8\pi}\frac{d\beta}{dy}(-\mathbf{L}L+\mathbf{M}M-\mathbf{N}N+\mu'_{11,22}\mathbf{L}^2+2\mu'_{12,22}\mathbf{LM}+\text{etc.})$$

$$+\frac{1}{8\pi}\frac{d\gamma}{dz}(-\mathbf{L}L-\mathbf{M}N+\mathbf{N}N+\mu'_{11,33}\mathbf{L}^2+2\mu'_{12,33}\mathbf{LM}+\text{etc.})$$

$$+\frac{1}{8\pi}\left(\frac{d\beta}{dz}+\frac{d\gamma}{dy}\right)(\mathbf{N}M+\mathbf{M}N+\mu'_{11,23}\mathbf{L}^2+2\mu'_{12,23}\mathbf{LM}+\text{etc.})$$

$$+\frac{1}{8\pi}\left(\frac{d\gamma}{dx}+\frac{dx}{dz}\right)(\mathbf{L}N+\mathbf{N}L+\mu'_{11,13}\mathbf{L}^2+2\mu'_{12,13}\mathbf{LM}+\text{etc.})$$

$$+\frac{1}{8\pi}\left(\frac{dx}{dy}+\frac{d\beta}{dx}\right)(\mathbf{M}L+\mathbf{L}M+\mu'_{11,12}\mathbf{L}^2+2\mu'_{12,12}\mathbf{LM}+\text{etc.})\,.$$

Nella funzione lineare del secondo membro il coefficiente di ciascuna delle velocità di deformazione, preso col segno negativo, ci dà evidentemente la componente di quella pressione, colla quale la materia disturbata magneticamente tende ad aumentare la deformazione considerata. Indichiamo cioè nel modo ordinario [1]) con X_x, X_y, X_z le componenti della pressione, che la materia contenuta nell'elemento $d\tau$ esercita su una sezione normale all'asse delle z ed estendiamo queste notazioni anche rispetto alle direzioni degli altri assi; allora l'espressione

$$X_x\frac{dx}{dx}+Y_y\frac{d\beta}{dy}+Z_z\frac{d\gamma}{dz}$$

$$+Y_z\left(\frac{d\beta}{dz}+\frac{d\gamma}{dy}\right)+X_z\left(\frac{d\gamma}{dx}+\frac{dx}{dz}\right)+X_y\left(\frac{dx}{dy}+\frac{d\beta}{dx}\right)$$

ci dà il lavoro meccanico, che la materia dell'elemento $d\tau$ eseguisce nella deformazione, riferito all'unità di tempo e di volume. Secondo la nostra ipotesi questo lavoro meccanico è uguale all'energia magnetica perduta nella deformazione. Poichè ciò

1) G. Kirchhoff, *Mechanik*. 11.a lezione.

vale per qualunque deformazione, così è confermata la validità della nostra affermazione. Ognuna delle componenti ottenute è una funzione quadratica omogenea delle tre componenti della forza magnetica dominante, o con ugual ragione delle tre componenti della polarizzazione magnetica dominante. Con considerazioni perfettamente analoghe si ottengono espressioni del tutto analoghe per le pressioni che provengono dalle perturbazioni elettriche. La pressione totale si ha dalla somma di quella magnetica con quella elettrica.

Rispetto ai valori trovati delle pressioni ponderomotrici faremo tre osservazioni. La prima riguarda la differenza fra il nostro sistema di pressioni e il sistema che Maxwell ha stabilito per il caso generale, nel quale le forze e le polarizzazioni hanno direzioni diverse [1]). Le formule di Maxwell sono da prima più semplici, poichè sono state dedotte senza tener alcun conto delle deformazioni possibili del mezzo. Una differenza assai più importante consiste in ciò, che le componenti della pressione, che stando ai simboli adottati, sono indicate con X_y e Y_x, secondo Maxwell hanno valori diversi, e per noi invece sono fra loro identiche. Nel nostro sistema ogni particella materiale lasciata a se stessa cambia unicamente di forma, mentre secondo Maxwell essa risente una rotazione anche nel suo insieme. Le pressioni di Maxwell non posson perciò ripeter la loro esistenza da processi interni all'elemento, e perciò non trovan luogo nella teoria qui esposta. Esse sono solamente ammissibili, se si parte dall'ipotesi che nell'interno del corpo che si muove l'etere sia in quiete e fornisca il necessario punto d'appoggio per la rotazione che ne resulta.

La seconda osservazione riguarda la semplicizzazione, che ricevono le nostre formule, se le riferiamo a corpi che sono inizialmente isotropi e che restano isotropi malgrado qualunque deformazione, cioè ai liquidi. Il sistema delle costanti μ' si riduce qui alla sola costante $\mu' = 1/\mu$. Se indichiamo poi con σ la densità del liquido, si ha:

$$\mu'_{11 \cdot 11} = \mu'_{22 \cdot 22} = \mu'_{33 \cdot 33} = -\frac{d\left(\frac{1}{\mu}\right)}{d \log \sigma} = \frac{1}{\mu^2} \frac{d\mu}{d \log \sigma},$$
$$\mu'_{12 \cdot 11} = \text{etc.} = 0.$$

1) Maxwell, *Treat. on electr. and magnet.* 2, pag. 254, 1873.

Quindi le componenti delle pressioni divengono:

$$
(6_b) \begin{cases}
X_x = \frac{\mu}{8\pi}(-L^2+M^2+N^2) - \frac{d\mu}{8\pi\, d\log\sigma}(L^2+M^2+N^2) \\
Y_y = \frac{\mu}{8\pi}(L^2-M^2+N^2) - \frac{d\mu}{8\pi\, d\log\sigma}(L^2+M^2+N^2) \\
Z_z = \frac{\mu}{8\pi}(L^2+M^2-N^2) - \frac{d\mu}{8\pi\, d\log\sigma}(L^2+M^2+N^2)
\end{cases}
$$

$$
X_y = -\frac{\mu}{4\pi}LM, \qquad X_z = -\frac{\mu}{4\pi}NL, \qquad Y_z = -\frac{\mu}{4\pi}MN.
$$

A forme completamente identiche a queste giunse anche Helmholtz [1]) per lo stesso caso, seguendo un andamento simile; le nostre formule si trasformano in quelle di Helmholtz, se si cambiano le notazioni in modo da sostituire L, M, N, μ con λ/θ, μ/θ, ν/θ, $1+4\pi\theta$, e si considera anche che il θ delle formule di Helmholtz è uguale a $d\theta/d\log\sigma = d\mu/4\pi\, d\log\sigma$ [2]).

La terza osservazione si riferisce alla questione della coincidenza delle resultanti delle pressioni dedotte dalle nostre ipotesi con le forze meccaniche e con le coppie che si osservano effettivamente nei corpi soggetti ad azioni elettromagnetiche. Osserviamo da prima che le nostre esperienze reali si limitano ai sistemi, che sono infinitamente prossimi allo stato statico o stazionario. Ma per tali sistemi il principio della conservazione dell'energia vale soltanto per calcolare, dalla perdita di energia elettromagnetica in ogni spostamento che si presenta, la grandezza delle componenti delle forze meccaniche che vi si oppongono, e si può ritenere come già dimostrato che le componenti così calcolate delle forze coincidono con quelle osservate. Un sistema di forze componenti, che sodisfa al principio della conservazione della forza, sarà sicuramente determinato dalle resultanti delle pressioni trovate; un tal sistema deve dunque essere appunto quello che si deduce immediatamente da quel principio.

1) V. Helmholtz, *Wied. Ann.* 13, pag. 400, 1881.

2) I segni restano opposti, perchè secondo Helmholtz è valutata positiva la trazione, mentre nel nostro sistema è positiva la pressione.

e che si trova in accordo con l'esperienza. Per giungere allo stesso resultato anche a posteriori, osserviamo che in ciò che accade realmente le pressioni elettrodinamiche son troppo deboli per provocare deformazioni sensibili nell'elemento di volume dei corpi solidi. Le deformazioni estremamente piccole che esse vi producono soglionsi separare, nel campo dell'elettricità, quali fenomeni dell'elettrostrizione, da quelli della elettrodinamica. Se dunque facciamo qui astrazione da questa classe speciale di fenomeni, per ciò che segue è indifferente l'ammettere nei solidi le pressioni da noi calcolate, o nessuna pressione, o quali si vogliano altre dello stesso ordine di grandezza. Potremo perciò in generale contentarci delle forme più semplici (6_b), nelle quali ora mai per i corpi cristallini la μ si dovrà ritenere come una costante arbitraria dell'ordine di grandezza delle μ_{11}, μ_{12}, etc. Ma potremo anzi semplicizzare ancor più le (6_b) trascurando i termini che contengono le $d\mu / d \log \sigma$. Poichè tali termini, che rappresentano una pressione uniforme, non possono produrre nei liquidi, per la loro piccola compressibilità, alcuno spostamento finito, ma soltanto fenomeni di elettrostrizione o magnetostrizione; e nei gas tali termini mancano perchè in essi la costante μ, e corrispondentemente la costante dielettrica, non cambia sensibilmente con la densità σ. Quelle forze ponderomotrici, che producono spostamenti finiti dei corpi gli uni rispetto agli altri, debbono quindi esser rappresentate dalle resultanti del sistema di pressioni ammesso valido in generale:

$$(6_c)\qquad \left\{\begin{aligned} X_x &= \frac{\mu}{8\pi}(-L^2+M^2+N^2) \\ Y_y &= \frac{\mu}{8\pi}(L^2-M^2+N^2) \\ Z_z &= \frac{\mu}{8\pi}(L^2+M^2-N^2) \end{aligned}\right.$$

$$X_y = -\frac{\mu}{4\pi} LM, \qquad X_z = -\frac{\mu}{4\pi} NL, \qquad Y_z = -\frac{\mu}{4\pi} MN.$$

Questo sistema semplificato delle pressioni magnetiche è

quello di Maxwell [1]). Maxwell ha già mostrato che questo, insieme col corrispondente sistema elettrico, contiene le forze ponderomotrici osservate fra' magneti, fra le correnti elettriche, e fra' corpi elettrizzati, e noi ci riferiremo alla di lui semplice esposizione.

Sembra peraltro che non sia stato osservato, che questo sistema di pressioni lascia, in generale, in quiete l'interno di un corpo, e specialmente dell'etere, soltanto allorchè le forze agenti hanno un potenziale, cioè quando gli stati dominanti sono statici o stazionari. Nel caso di un'eccitazione elettromagnetica qualunque e ammissibile, le pressioni trovate debbono porre in moto l'etere, da noi espressamente supposto mobile, con velocità che si potrebbero calcolare se si avesse qualche modo di valutar la massa dell'etere. Questo resultato sembra aver di per sè poca verosimiglianza. Ma per potere, a cagion di questo, rigettar la teoria, non v'è alcuna ragione che si deduca dal lavoro presente, poichè quel resultato non contradice nè colle ipotesi fatte, nè con l'esperienze conosciute. La piccola massa d'aria, che resta nei recipienti ove si è fatta la rarefazione estrema, basta cioè completamente, per poter ritenere tutte le correnti che sia possibile eccitare coi mezzi di cui disponiamo, come quantità inapprezzabili.

Concludendo, desidererei far risaltare ancora una volta, che io attribuisco alla teoria qui esposta qualche valore, solamente riguardo ad una esposizione sistematica. Questa teoria mostra come si posson trattare completamente i fenomeni elettromagnetici nei corpi in moto, sotto certe limitazioni, che del resto ci siamo imposte arbitrariamente. Che tali limitazioni, corrispondano a ciò che avviene di fatti in natura, è poco probabile. La teoria esatta dovrebbe piuttosto esser quella, che separasse in ogni punto lo stato dell'etere da quello della materia ponderabile. Ma per fondare una teoria che corrisponda a questo concetto, mi pare che si richieda, nello stato attuale delle nostre cognizioni, un maggior numero d'ipotesi ancor più arbitrarie, di quello che è stato necessario per la teoria sopra esposta.

1) Maxwell, *Treat. on electr. and magnet.* 1873, 2, pag. 256. I segni sono qui opposti, perchè secondo Maxwell una trazione, e secondo noi è positiva una pressione.

RICERCHE SPERIMENTALI SULLA PROPAGAZIONE DEL FLUSSO MAGNETICO; NOTA DI G. PISATI.

1. Dopo avere constatato [1]) che la propagazione del flusso magnetico nel ferro avviene in modo simile a quello con cui il calore si propaga nelle verghe scaldate ad una estremità, mi sono proposto di fare uno studio sistematico per determinare le leggi del flusso magnetico variando:

a) l'intensità della forza magnetizzante;

b) la forma e le dimensioni dell'elica eccitatrice e la sua posizione sul conduttore magnetico;

c) la sezione e la linea direttrice del conduttore;

d) la natura chimica e le condizioni fisiche della sostanza magnetica;

e) la natura dell'ambiente in cui il conduttore si trova immerso.

2. Le esperienze di cui è oggetto la presente Nota si riferiscono alla questione *a*).

Ho adoperato un conduttore rettilineo consistente in un fascio compatto di 25 fili di ferro lunghi un metro e del diametro di un millimetro, ciascuno dei quali era stato coperto d'una vernice di gomma lacca.

L'elica eccitatrice o primaria era cilindrica della lunghezza di 80 mm. e formata di 400 giri distribuiti uniformemente in quattro strati: venne infilata sul fascio e fissata nel mezzo della sua lunghezza.

L'elica indotta o secondaria era anch'essa cilindrica ma lunga soltanto 2 mm., comprendeva in tutto 100 giri distribuiti in 25 strati, era infilata normalmente sul fascio e poteva scorrere lungo di esso. Per determinare la distanza relativa fra le due eliche, fu disposto parallelamente al fascio un regolo graduato sul quale faceva da indice una punta collegata invariabilmente coll'elica secondaria: quando l'indice segnava zero sulla scala, la distanza fra i centri delle due eliche era di 48 mm..

Per produrre la corrente primaria od eccitatrice fu adope-

1) V. *Rend. della R. Acc. de' Lincei*, seduta del 2 febb. 1890.

rata una pila Ponci (ferro-cloruro ferroso, carbone-cloruro ferrico) di 10 elementi di grande modello disposti in due derivazioni ciascuna comprendente 5 elementi in serie. Prima d'incominciare le esperienze ho fatto uno studio della pila per conoscere l'andamento della corrente da essa generata: ho osservato che lasciando il circuito chiuso con una debole resistenza esterna la corrente diminuiva da principio un po' rapidamente, indi sempre più lentamente e dopo un'ora la diminuzione era appena di $0^{amp},002$ al minuto primo: ma se in seguito si apriva il circuito e dopo 30 secondi lo si richiudeva, avevasi nei primi istanti un notevole aumento di corrente difficile a misurarsi e che rapidamente andava sparendo, sicchè dopo 3 minuti dall'ultima chiusura la corrente ripigliava il suo andamento normale. Nelle esperienze sulla propagazione del flusso magnetico dovetti perciò rinunciare all'uso delle correnti di chiusura ed adoperare le sole correnti di apertura. Ho fatto variare le correnti eccitatrici da circa 0,02 a 0,16 unità C. G. S.; per conseguenza le forze magnetizzanti adoperate furono comprese tra circa 12 e 100 unità C. G. S.

La misura della corrente primaria fu fatta con un galvanometro a torsione costruito dallo stabilimento Siemens e Halske: è graduato in milliampères, ha la resistenza di un ohm a 15° e fu adoperato mettendolo in derivazione con una resistenza di $^1/_9$ di ohm. Unitamente allo strumento i costruttori hanno mandato una tabella di correzione, ma prima di adoperarla fu fatto un confronto tra l'amperometro ed un voltametro a nitrato d'argento, dal quale confronto risultò che quando lo strumento segna 100^p la correzione è $+ 0^p,15$: la tabella dei costruttori dà $+ 0^p,2$; l'accordo adunque è sodisfacente. Con ripetute esperienze fu determinato altresì il potere del riduttore associato al galvanometro. Fatte tutte le correzioni la misura della corrente primaria ha un error probabile di $\pm 0,0002$ unità C. G. S.

Le correnti secondarie furono misurate mediante un galvanometro balistico a riflessione, anch'esso costruito dal Siemens e Halske. Le letture si fecero per mezzo di cannocchiale, su una scala divisa in millimetri posta alla distanza di cm. 172 dallo specchio. Da esperienze preliminari ho dedotto che per deviazioni non maggiori di 60^p, l'error probabile di ciascuna osserva-

zione è ± 0p,1 ; ma col crescere della deviazione la misura diviene sempre meno precisa, sino a che per deviazioni di circa 350p l'error probabile raggiunge il valore ± 0p,5.

Prima di adoperare lo strumento nelle ricerche sul flusso magnetico era indispensabile di conoscere la relazione che esiste tra le variazioni del flusso e le corrispondenti indicazioni del galvanometro balistico. Per mezzo di molte osservazioni eseguite con due metodi diversi ho potuto constatare che la prima elongazione del mio galvanometro, tenuto conto degli errori probabili d'osservazione, è direttamente proporzionale alla corrispondente variazione di flusso che la produce. Qui riferirò soltanto i risultati di una serie di osservazioni fatte con due rocchetti stabilmente disposti l'un dentro l'altro, il 1° essendo in comunicazione con la pila l'amperometro ed una cassetta di resistenze, mentre l'altro comunicava col galvanometro balistico.

Corr. primaria in unità C. G. S. i	1.a elongaz. del galv. balistico G	G : i	G'(calcolato)	G — G'
0,0023	9,1	3,956	9.1	0,0
0,0045	17,8	3,955	17,7	+ 0,1
0,0087	34,2	3,931	34,2	0,0
0,0107	41,9	3,916	42,1	— 0,2
0,0121	47,4	3,917	47,6	— 0,2
0,0138	54,2	3,928	54,3	— 0,1
0,0150	58,4	3,893	59,0	— 0,6
0,0161	63,5	3,944	63,4	+ 0,1
0,0219	86,0	3,927	86,2	— 0,2
0,0285	112,8	3,958	112,2	+ 0,6
0,0325	127,9	3,935	128,0	— 0,1
0,0363	143,0	3,939	142,9	+ 0,1
0,0402	158,3	3,938	158,3	0,0
0,0462	182,2	3,944	181,9	+ 0,3
0,0506	199,9	3,953	198,8	+ 1,1
0,0555	218,7	3,941	218,5	+ 0,2
0,0608	239,2	3,934	239,4	— 0,2
0,0655	258,1	3,911	257,9	+ 0,2
0,0705	277,3	3,933	277,6	— 0,3
0,0755	296,7	3,930	297,3	— 0,6
0,0808	318,3	3,939	318,1	+ 0,2
0,0859	338,4	3,940	338,2	+ 0,2
0,0906	356,4	3,934	356,7	— 0,3
0,0948	374,0	3,945	373,2	+ 0,8

media: 3,937

3. Compiuto lo studio degli strumenti di misura ho incominciato le esperienze sulla propagazione del flusso magnetico nel fascio di fili di ferro.

Messa l'elica secondaria ad una certa distanza dall'elica eccitatrice, un operatore osservando l'amperometro regolava per mezzo d'un reostato l'intensità della corrente primaria e quando questa era sensibilmente costante (dentro $\pm 0^{amp},002$), apriva il circuito ed allora un secondo osservatore leggeva per mezzo del cannocchiale l'indicazione del galvanometro balistico: indi si richiudeva il circuito primario e si ripetevano almeno altre 2 o 3 volte le stesse operazioni. Di poi, rimanendo sempre costante la distanza tra le due eliche, si esperimentava successivamente con correnti di diversa intensità e teminata la prima serie di osservazioni se ne fecero altre 15 nello stesso modo ma variando dall'una all'altra la distanza tra le due eliche.

I risultati delle osservazioni sono raccolti nella tabella I in cui d indica la divisione segnata sulla scala dall'indice connesso coll'elica secondaria, i l'intensità della corrente eccitatrice in unità C. G. S., e G la prima elongazione del galvanometro balistico.

Le sedici serie di osservazioni registrate nella tabella I vennero fatte alcune incominciando dalla corrente più debole e salendo via via fino alla più forte; altre procedendo nell'ordine inverso; ed altre ancora facendo variare la i saltuariamente: fu altresì saltuario l'ordine con cui si fecero variare le distanze d.

Quasi tutte le volte che si passava da una corrente debole ad una più forte ho notato che per effetto di un po' d'isteresi, alla prima apertura del circuito primario l'elongazione del galvanometro balistico era sensibilmente minore di quelle che si ottenevano nelle successive aperture: un fatto analogo ma in senso inverso si è presentato quasi costantemente quando si passava da una corrente forte ad una più debole. Ecco due esempi presi a caso dal libretto delle osservazioni.

Esempio 1°. — Corrente precedente	$i = 0,1424$	$d = 4$cm
nuova corrente	$i = 0,1628$	G = 134p,5
	0,1627	141,3
	0,1624	141,5
	0,1624	141,2
Media delle ultime 3 osservazioni	$i = 0,1625$	G = 141,3

Esempio 2°. — Corrente precedente	$i = 0,1021$	$d = 9$cm
nuova corrente	$i = 0,0820$	G = 23p,4
	0,0826	18,2
	0,0826	18,0
	0,0828	18,1
Media delle ultime 3 osservazioni	$i = 0,0827$	G = 18,1

Per eliminare l'effetto dell'induzione prodotta dalla sola elica primaria, ho sostituito al fascio di ferro una canna di vetro, ed esperimentando nel solito modo ottenni i risultati contenuti nella seconda tabella numerica.

Coi dati della tabella I ho costruito su grande scala le curve corrispondenti prendendo per ascisse le correnti primarie (1 cm = 0,002 $[C^{1/2}\ G^{1/2}\ S^{-1}]$) e per ordinate i valori di G (1 cm = 2p della scala. Un' analoga rappresentazione fu fatta dei valori ottenuti senza il fascio magnetico: infine dalle curve così costruite dedussi i valori di G, compresa la correzione γ, contenuti nella III tabella numerica, i quali si possono considerare senz' altro come valori osservati direttamente.

Tabella I. *Valori osservati*

$d = 0$ cm.		1 cm.		2 cm.		3 cm.	
i	G	*i*	G	*i*	G	*i*	G
0,0207	24,8	0,0207	18,3	0,0207	13,2	0,0210	10,[illegible]
0308	43,1	0307	31,7	0310	24,2	0313	17,[illegible]
0416	67,0	0417	50,7	0416	38,2	0412	27[illegible]
0546	99,0	0513	71,3	0513	52,1	0512	3[illegible]
0622	122,1	0623	93,9	0620	72,4	0616	54[illegible]
0821	185,8	0829	142,0	0827	113,0	0824	87[illegible]
1028	241,8	1020	191,0	1026	151,0	1029	120[illegible]
1217	286,6	1223	231,8	1227	187,2	1238	14[illegible]
1425	322,6	1439	263,8	1434	211,3	1439	16[illegible]
1603	345,8	1628	282,7	1602	225,7	1585	17[illegible]

$d = 8$ cm.		9 cm.		10 cm.		11 cm.	
i	G	*i*	G	*i*	G	*i*	G
0,0410	6,3	0,0403	5,1	—	—	—	—
0513	9,5	0503	7,4	0,0513	6,0	—	—
0621	13,2	0610	10,6	0616	8,2	0,0614	6,4
0830	22,4	0827	18,1	0810	13,4	0824	11,[illegible]
1019	31,7	1021	25,9	1016	19,2	1020	15,[illegible]
1218	40,2	1234	32,9	1235	25,1	1227	19[illegible]
1416	46,5	1431	37,1	1422	29,1	1408	2[illegible]
—	—	1501	38,4	1537	30,8	1500	23[illegible]
1584	50,3	1574	39,4	1635	31,8	1581	24,[illegible]

Tabella II. *Valori osservati sen[illegible]*

$d = 0$ cm.		1 cm.		2 cm.		3 cm.	
i	γ	*i*	γ	*i*	γ	*i*	γ
0,0202	0,6	0,0202	0,3	0,0203	0,2	0,0202	0,[illegible]
0473	1,4	0472	0,5	0472	0,3	0472	0,[illegible]
0861	2,5	0856	0,9	0858	0,5	0858	0,[illegible]
1186	3,5	1171	1,4	1157	0,7	1154	[illegible]
1588	4,5	1581	1,9	1575	1,0	1572	0,[illegible]

...io di fili di ferro.

4 cm.		5 cm.		6 cm.		7 cm.	
i	G	i	G	i	G	i	G
0,0210	7,8	0,0205	5,3	0,0206	3,9	0,0206	3,0
0317	14,0	0308	9,5	0306	7,2	0308	5,3
0409	20,2	0409	15,6	0412	11,2	0404	8,5
0517	30,0	0506	21,9	0517	16,6	0507	12,5
0615	41,1	0611	30,6	0624	23,2	0612	17,7
0825	66,8	0816	50,6	0828	38,4	0808	29,1
1022	92,8	1035	72,9	1036	55,4	1034	43,5
1221	114,7	1225	88,4	1220	67,3	1227	53,2
1424	130,3	1421	100,9	1433	78,1	1415	60,0
1625	141,3	1612	110,0	1609	84,3	1624	66,0

12 cm.		13 cm.		14 cm.		15 cm.	
i	G	i	G	i	G	i	G
—	—	—	—	—	—	—	—
0,0510	3,7	—	—	0,0510	2,3	—	—
0615	5,2	—	—	0611	3,2	—	—
0823	8,8	0,0828	6,7	0819	5,2	—	—
1023	12,4	1027	9,9	1022	7,8	—	—
1230	15,9	1221	12,2	1230	9,7	—	—
1435	18,2	1449	14,0	1439	11,4	0,1453	9,0
1541	19,1	1519	14,5	1520	11,9	1520	9,3
1613	19,9	1599	14,8	1581	12,2	1608	9,6

...io di fili di ferro.

4 cm.		5 cm.		6 cm.		7 cm.	
i	γ	i	γ	i	γ	i	γ
—	—	—	—	—	—	—	—
0,0472	0,0	—	—	—	—	—	—
0858	0,1	0,0858	0,0	—	—	—	—
1152	0,2	1150	0,1	0,1149	0,0	—	—
1574	0,3	1573	0,2	1571	0,1	0,1576	0,0

Tabella III.

Valori di G letti sulle curve e fatta la correzione γ.

	i = 0,16	0,15	0,14	0,13	0,12	0,11	0,10
d = cm. 0	340,9	328,7	314,7	298,9	279,3	255,7	231,0
1	278,3	268,7	257,4	243,2	226,4	207,4	184,9
2	224,5	216,3	207,1	196,2	182,3	165,2	146,2
3	178,2	171,7	163,9	154,4	143,3	130,6	115,9
4	139,8	134,6	128,4	121,2	112,4	10[illegible],1	89,8
5	109,4	104,8	99,7	93,7	86,5	78,5	69,4
6	84,0	80,6	76,7	71,8	66,2	59,8	52,7
7	65,4	62,6	59,5	56,1	52,0	47,1	41,5
8	50,6	48,6	46,1	43,0	39,5	35,4	30,8
9	39,7	38,3	36,6	34,4	32,0	28,7	25,0
10	31,5	30,3	28,8	26,7	24,2	21,6	18,8
11	24,3	23,4	22,4	21,1	19,5	17,4	15,3
12	19,6	18,9	18,0	16,8	15,5	13,8	12,0
13	14,8	14,4	13,7	13,0	12,0	10,9	9,5
14	12,3	11,8	11,1	10,3	9,5	8,6	7,5
15	9,6	9,2	8,8	—	—	—	—

	i = 0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02
d = cm. 0	205,2	177,3	145,0	113,1	85,3	62,1	40,5	23,1
1	159,3	133,9	110,4	88,2	66,8	46,9	30,3	17,4
2	126,8	107,2	87,2	68,6	51,3	35,7	22,9	12,5
3	99,5	83,6	67,7	52,1	37,7	25,9	16,4	9,3
4	76,5	63,4	51,0	39,1	28,2	19,6	12,8	7,3
5	59,2	48,9	39,0	29,6	21,4	14,8	9,4	5,3
6	44,4	36,1	28,5	21,6	15,6	10,8	6,9	3,7
7	35,1	28,6	22,5	17,1	12,3	8,3	5,2	2,8
8	25,8	21,0	16,5	12,4	9,0	6,2	3,9	2,2
9	21,0	17,0	13,5	10,3	7,4	5,1	—	—
10	16,0	13,1	10,3	7,8	5,8	—	—	—
11	12,8	10,5	8,1	6,2	4,6	—	—	—
12	10,2	8,4	6,6	5,0	3,6	—	—	—
13	7,9	6,3	4,9	3,7	2,7	—	—	—
14	6,3	5,0	4,0	3,1	2,3	—	—	—

Rimane ora ad estrinsecare da codesta abbondante messe di osservazioni in 1.° luogo la legge secondo cui varia il flusso da una sezione all'altra del fascio quando è costante la corrente eccitatrice ed in 2.° luogo la legge del flusso in una data sezione quando invece la corrente eccitatrice assume diversi valori. Ma su questi argomenti riferirò in una prossima Nota.

Sento il dovere di rendere pubbliche e vive grazie al signor E. Majolini, che mi ha assiduamente assistito in tutto questo lavoro.

SUL CALORE SPECIFICO DELL' ACQUA SOPRAFUSA;
NOTA DEI PROFF. A. BARTOLI ED E. STRACCIATI.

In una precedente nota [1]) abbiamo dimostrato che, secondo le nostre esperienze, il calore specifico vero C_t dell' acqua, può rappresentarsi (fra $t = 0$ e $t = 35°$) con molta approssimazione, per mezzo della formula empirica

$$\begin{aligned} C_t = &\ 1{,}006\ 630 \\ &- 0{,}000\ 593\ 962\ 000\, t \\ &+ 0{,}000\ 004\ 338\ 650\, t^2 \\ &+ 0{,}000\ 000\ 425\ 520\, t^3 \\ &- 0{,}000\ 000\ 002\ 819\, t^4 \end{aligned}$$

avendo assunto per unità il calore specifico vero a + 15°.

Da questa formula si deduce

$$\begin{aligned} C_0 &= 1{,}006\ 63 \\ C_{-1} &= 1{,}007\ 23 \\ C_{-2} &= 1{,}007\ 83 \\ C_{-3} &= 1{,}008\ 44 \\ C_{-4} &= 1{,}009\ 05 \\ C_{-6} &= 1{,}010\ 25 \\ C_{-8} &= 1{,}011\ 43 \\ C_{-10} &= 1{,}012\ 55 \end{aligned}$$

1) Bartoli e Stracciati *Nuovo Cimento* 1885, terza serie, T. XVIII, *Bullettino dell'Accademia Gioenia*, Catania 1889, fasc. VII, pag. 3-7, e fasc. XVIII-XIX, marzo 1891, pag. 25-29.

Ossia, che al disotto di zero il calore specifico vero dell' acqua allo stato liquido va crescendo col decrescere della temperatura.

Se si assume come unità, il calore specifico vero dell'acqua a zero, i numeri precedenti divengono

$$C_0 = 1{,}000\ 0$$
$$C_{-1} = 1{,}000\ 6$$
$$C_{-2} = 1{,}001\ 2$$
$$C_{-3} = 1{,}001\ 8$$
$$C_{-4} = 1{,}002\ 4$$
$$C_{-6} = 1{,}003\ 6$$
$$C_{-8} = 1{,}004\ 8$$
$$C_{-10} = 1{,}005\ 9$$

Questi valori vanno d' accordo con quelli dedotti dalla formula del sig. Dott. M. Martinetti [1])

$$C_{t,0} = 1{,}000\,04 - 0{,}000\,255\, t$$

dove $C_{t,0}$ esprime il calore specifico medio fra t^0 e zero, formula dalla quale si deduce l'altra, pel calore specifico vero C_t

$$C_t = 1{,}000\,040 - 0{,}000\,510\, t$$

onde (assumendo per unità il calore specifico vero a zero)

$$C_0 = 1{,}000\ 0$$
$$C_{-1} = 1{,}000\ 5$$
$$C_{-2} = 1{,}001\ 0$$
$$C_{-3} = 1{,}001\ 5$$
$$C_{-4} = 1{,}002\ 0$$
$$C_{-6} = 1{,}003\ 1$$
$$C_{-8} = 1{,}004\ 1$$
$$C_{-10} = 1{,}005\ 1$$

1) M. Martinetti, *Sul calore specifico dell' acqua al disotto di zero.* — *Nuovo Cimento*, Pisa 1891, ed *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino*, vol. XXV, 22 giugno 1890.

Anche il chiariss. Prof. Cardani aveva trovato con un metodo ingegnoso che il calore specifico dell' acqua soprafusa cresce col decrescere della temperatura [1]).

Fra non molto renderemo conto di altre esperienze dirette a confermare questi resultati relativi al calore specifico dell'acqua soprafusa.

Istituto Fisico dell' Università di Catania
marzo 1892.

SULLA TEORICA DEI MOTI VORTICOSI NEI FLUIDI INCOMPRESSIBILI; TESI DI LAUREA DI CORNELIA FABRI, PUBBLICATA NEGLI ANNALI DELLA R. SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA.

Sunto fatto dall' Autrice.

Nello studiare la dinamica dei fluidi perfetti, Helmholtz [2]) ha decomposto il movimento di ogni particella fluida in tre movimenti elementari cioè, in una traslazione, in una rotazione ed in un movimento detto, da Thomson e Tait, pura deformazione che è il risultato di tre dilatazioni o contrazioni subìte dalla particella nella direzione degli assi principali di una superficie di secondo grado. Le tre componenti di questo ultimo movimento, come è noto, sono date dalle derivate parziali rispetto ad x, y, z di una funzione omogenea di secondo grado. Helmholtz giunge a questa decomposizione studiando i soli termini di primo grado nello sviluppo in serie di Taylor delle componenti u, v, w della velocità, considerate quali funzioni delle coordinate.

Rowland, nell' *American Journal of Mathematics* del Settembre 1880, pubblicava una interessante memoria nella quale

1) Cardani e Tommasini, *Sul calore specifico dell' acqua al disotto di zero.* — *Nuovo Cimento*, serie terza, T. XXI.

In quanto alla questione di un *massimo* nel calore specifico dell' acqua soprafusa, la nostra formula lo darebbe soltanto a — 22°7; ma la nostra formula stabilita fra + 35° e + 0° non può certamente essere estesa a temperature troppo inferiori a zero.

2) *Wissenschaftliche Abhandlungen, Hydrodynamik.*

si occupava di certi movimenti che provengono da alcune parti dei termini di grado superiore al primo che appariscono nello sviluppo anzidetto; però Rowland non considera tutti i termini di un dato grado e poco si occupa di ricercare il significato cinematico dei moti che prende a studiare.

Ricerche più complete, limitatamente ai termini di 2.° grado, sono state fatte dal Boggio-Lera e pubblicate negli Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa del 1887. Egli, in fatto, ha considerato tutti i termini di secondo grado ed è giunto a decomporre il moto di una particella fluida in sei movimenti, tre dei quali, dovuti ai termini di primo grado, sono quelli medesimi indicati dall' Helmholtz. Gli altri tre movimenti, che provengono dai termini di secondo grado, sono stati dallo stesso Boggio-Lera denominati flessione, torsione e deformazione di secondo grado con potenziale. Il primo di questi movimenti, che corrisponde a quello che Rowland chiama *vortices of the vortices* ha una stretta relazione colla rotazione di Helmholtz, perchè i parametri, che individuano la flessione, sono composti con quelli relativi alla rotazione, come questi sono formati dalle componenti della velocità. Ma i moti di flessione sono assai diversi da quelli di rotazione, perchè, mentre nei moti rotatorii i punti si muovono in piani normali all' asse di rotazione, nelle flessioni invece si muovono in piani che passano per una retta, detta asse di flessione. Il secondo movimento è il risultato di tre torsioni intorno a rette ortogonali passanti per l' origine delle coordinate e finalmente le componenti del terzo movimento sono le derivate rispetto a x, y, z di una funzione omogenea di terzo grado.

In questo breve ed incompleto lavoro ho avuto in animo di estendere o proseguire alcune delle indicate ricerche di Helmholtz, Rowland e Boggio-Lera, rivolgendo lo studio ad un numero qualunque m di termini nello accennato sviluppo in serie di Taylor delle componenti della velocità. Ho cominciato collo studiare le deformazioni che riceve un mezzo continuo, quando ai suoi punti si attribuiscono degli spostamenti, le di cui componenti sono funzioni omogenee di qualunque grado m delle coordinate, decomponendo questo spostamento in tre parti, una delle quali rappresenti un moto di Rowland e le altre due parti siano tali che, quando $m = 1$, rappresentino una traslazione ed

una *pura deformazione*, e quando $m = 2$ rendino la mia decomposizione coincidente con quella fatta dal Bòggio-Lera. In questa guisa mi è riuscito facile trovare il significato cinematico dei moti di Rowland, il qual significato è forse più semplice di quello che a prima vista può credersi. Dipoi ho adoperato questa decomposizione per studiare il movimento di una particella fluida, decomponendo ogni termine dello sviluppo in serie di Taylor delle componenti della velocità nel modo precedentemente indicato cioè, in un movimento di Rowland, in altro movimento che ammette potenziale ed in un terzo movimento non rappresentabile con vettori; così ho decomposto il moto della particella fluida in 3 m moti, vale a dire, in una traslazione, in m movimenti che hanno per componenti le derivate rispetto ad x, y, z di funzioni omogenee di 2°, 3° $(m+1)^{\text{esimo}}$ grado rispettivamente, in $m-1$ movimenti di natura assai complicata non rappresentabili con vettori e finalmente in altri m moti che in sostanza sono quelli stessi studiati dal Rowland, e che hanno, come dimostrerò in seguito, stretta analogia, o colle rotazioni di Helmholtz, o colle flessioni del Boggio-Lera, secondo che le loro componenti provengono da termini di grado dispari o di grado pari.

Ma, innanzi di esporre dettagliatamente i risultati del mio studio, sento il dovere di porgere i più vivi ringraziamenti al chiarissimo Prof. Vito Volterra che mi ha indirizzato in queste ricerche ed ha avuto la bontà di rivedere tutti i miei calcoli.

§ I.

Siano δx, δy, δz le componenti di uno spostamento attribuito ai punti di un mezzo continuo; se si suppongono funzioni omogenee di grado m delle coordinate, sarà

$$\delta x = \Sigma \frac{m!}{a!\,b!\,c!} U_{a,b,c}\, x^a y^b z^c$$

$$\delta y = \Sigma \frac{m!}{a!\,b!\,c!} V_{a,b,c}\, x^a y^b z^c$$

$$\delta z = \Sigma \frac{m!}{a!\,b!\,c!} W_{a,b,c}\, x^a y^b z^c$$

e Σ rappresenterà una somma estesa a tutte le possibili combinazioni di valori interi e positivi di a, b, c pei quali è $a + b + c = m$, non escluso che alcune delle a, b, c siano zero.

Primieramente si supponga m dispari della forma $2n + 1$, e posto per brevità

$$h + k + l = n$$

$$\frac{n!}{(2n+1)!} \cdot \frac{2h!}{h!} \cdot \frac{2k!}{k!} \cdot \frac{2l!}{l!} = \varepsilon_{h,k,l}$$

$$\frac{2h!\ 2k!\ 2l!}{(2n+1)!} = \lambda_{h,k,l}$$

$$\frac{n!}{h!\ k!\ l!}\ \mu_{h,k,l}$$

$$\Sigma \varepsilon_{h,k,l}\, \mu_{h,k,l}\, (m + 1 - 2h) =$$

$$= \Sigma \varepsilon_{h,k,l}\, \mu_{h,k,l}\, (m + 1 - 2k) =$$

$$= \Sigma \varepsilon_{h,k,l}\, \mu_{h,k,l}\, (m + 1 - 2l) = D_{2n+1}$$

si decompongano i coefficienti $U_{a,b,c}$, $V_{a,b,c}$ $W_{a,b,c}$ in tre parti nel modo seguente.

$$(1) \begin{cases} U_{m,0,0} = H_{2n+2,0,0} \\ U_{2h+1,2k,2l} = H_{2h+2,2k,2l} + \lambda_{h,k,l}\,(2h+1)\, A_{2h+1,2k,2l} \\ U_{2h+1,2k+1,2l-1} = H_{2h+2,2k+1,2l-1} + \dfrac{(2h+1)(2k+1)}{2l}\, \lambda_{h,k,l} A_{2h+1,2k+1,2l-1} \\ U_{2h,2k+1,2l} = \\ = (-1)^n r_{2n+1} (2k+1)\, \varepsilon_{h,k,l} + H_{2h+1,2k+1,2l} + (2k+1)\, \lambda_{h,k,l} A_{2h,2k+1,2l} \\ U_{2h,2k,2l+1} = \\ = (-1)^{n+1} q_{2n+2} (2l+1)\, \varepsilon_{h,k,l} + H_{2h+1,2k,2l+1} + (2l+1)\, \lambda_{h,k,l} A_{2h,2k,2l+1} \end{cases}$$

$$
(2)\quad \begin{cases}
V_{0,m,0} = H_{0,2n+2,0} \\
V_{2h,2k+1,2l} = H_{2h,2k+2,2l} + (2k+1)\lambda_{h,k,l}B_{2h,2k+1,2l} \\
V_{2h-1,2k+1,2l+1} = H_{2h-1,2k+2,2l+1} + \dfrac{(2l+1)(2k+1)}{2h}\lambda_{h,k,l}B_{2h-1,2k+1,2l+1} \\
V_{2h,2k,2l+1} = \\
=(-1)^n p_{2n+1}(2l+1)\varepsilon_{h,k,l} + H_{2h,2k+1,2l+1} + (2l+1)\lambda_{h,k,l}B_{2h,2k,2l+1} \\
V_{2h+1,2k,2l} = \\
=(-1)^{n+1} r_{2n+1}(2h+1)\varepsilon_{h,k,l} + H_{2h+1,2k+1,2l} + (2h+1)\lambda_{h,k,l}B_{2h+1,2k,2l}
\end{cases}
$$

$$
(3)\quad \begin{cases}
W_{0,0,m} = H_{0,0,2n+2} \\
W_{2h,2k,2l+1} = H_{2h,2k,2l+2} + (2l+1)\lambda_{h,k,l}C_{2h,2k,2l+1} \\
W_{2h+1,2k-1,2l+1} = H_{2h+1,2k-1,2l+2} + \dfrac{(2h+1)(2l+1)}{2k}\lambda_{h,k,l}C_{2h+1,2k-1,2l+1} \\
W_{2h+1,2k,2l} = \\
=(-1)^n q_{2n+1}(2h+1)\varepsilon_{h,k,l} + H_{2h+1,2k,2l+1} + (2h+1)\lambda_{h,k,l}C_{2h+1,2k,2l} \\
W_{2h,2k+1,2l} = \\
=(-1)^{n+1} p_{2n+1}(2k+1)\varepsilon_{h,k,l} + H_{2h,2k+1,2l+1} + (2k+1)\lambda_{h,k,l}C_{2h,2k+1,2l}
\end{cases}
$$

con

$$
(4)\quad \begin{cases}
A_{a,b,c} + B_{a+1,b-1,c} + C_{a+1,b,c-1} = 0 \\
\Sigma\varepsilon_{h,k,l}\left[(2k+1)\,C_{2h,2k+1,2l} - (2l+1)\,B_{2h,2k,2l+1}\right] = 0 \\
\Sigma\varepsilon_{h,k,l}\left[(2l+1)\,A_{2h,2k,2l+1} - (2h+1)\,C_{2h+1,2k,2l}\right] = 0 \\
\Sigma\varepsilon_{h,k,l}\left[(2h+1)\,B_{2h+1,2k,2l} - (2k+1)\,A_{2h,2k+1,2l}\right] = 0\,,
\end{cases}
$$

essendo Σ il simbolo di una somma estesa a tutte le possibili combinazioni di valori interi e positivi di h, k, l pei quali è $h+k+l=n$. Le precedenti equazioni possono risolversi rispetto alle p_{2n+1}, q_{2n+1}, r_{2n+1} alle H ed alle A, B, C ed in tal modo si riconosce che lo spostamento $\delta x, \delta y, \delta z$ può considerarsi risultante di tre spostamenti $\delta u_1, \delta v_1, \delta w_1$; $\delta u_2, \delta v_2, \delta w_2$; $\delta u_3, \delta v_3, \delta w_3$ le componenti dei quali sono:

$$\begin{cases} \delta u_1 = \Sigma \dfrac{(2n+1)!}{(s-1)!\,f!\,g!} \mathrm{H}_{s,f,g}\, x^{s-1}\, y^f\, z^g \\ \delta v_1 = \Sigma \dfrac{(2n+1)!}{s!\,(f-1)!\,g!} \mathrm{H}_{s,f,g}\, x^s\, y^{f-1}\, z^g \\ \delta w_1 = \Sigma \dfrac{(2n+1)!}{s!\,f!\,(g-1)!} \mathrm{H}_{s,f,g}\, x^s\, y^f\, z^{g-1} \end{cases}$$ [1]

$$(5) \quad \begin{cases} \delta u_2 = (-1)^n\,(x^2+y^2+z^2)^n\,(r_{2n+1}\, y - q_{2n+1}\, z) \\ \delta v_2 = (-1)^n\,(x^2+y^2+z^2)^n\,(p_{2n+1}\, z - r_{2n+1}\, x) \\ \delta w_2 = (-1)^n\,(x^2+y^2+z^2)^n\,(q_{2n+1}\, x - p_{2n+1}\, y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta u_3 = \Sigma\, \mathrm{A}_{a,b,c}\, x^a\, y^b\, z^c \\ \delta v_3 = \Sigma\, \mathrm{B}_{a,b,c}\, x^a\, y^b\, z^c \\ \delta w_3 = \Sigma\, \mathrm{C}_{a,b,c}\, x^a\, y^b\, z^c . \end{cases}$$

Il primo di questi spostamenti ammette una funzione potenziale

$$\phi = \frac{1}{2n+2} \Sigma \frac{(2n+2)!}{s!\,f!\,g!} \mathrm{H}_{s,f,g}\, x^s\, y^f\, z^g$$

avendosi

$$\delta u_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad \delta v_1 = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad \delta w_1 = \frac{\partial\phi}{\partial z} .$$

Il secondo spostamento avviene in una direzione che è normale, tanto al raggio vettore che va all' origine delle coordinate quanto alla retta di equazioni

$$(6) \qquad \frac{x}{p_{2n+1}} = \frac{y}{q_{2n+1}} = \frac{z}{r_{2n+1}}$$

1) Il simbolo Σ che si trova in queste formule denota una somma estesa a tutti i possibili valori interi e positivi di f, g, s che rendono

$$s+f+g=2n+2 .$$

perchè si ha evidentemente

$$x\,\delta u_2 + y\,\delta v_2 + z\,\delta w_2 = 0$$

$$p_{2n+1}\,\delta u_2 + q_{2n+1}\,\delta v_2 + r_{2n+1}\,\delta w_2 = 0:$$

e pei parametri p_{2n+1}, q_{2n+1}, r_{2n+1}, che lo individuano, si ricavano dalle (1), (2), (3), (4) i seguenti valori

$$(7)\quad \begin{cases} p_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n}{D_{2n+1}} \Sigma \mu_{h,k,l} \left[V_{2h,2k,2l+1} - W_{2h,2k+1,2l} \right] \\[2ex] q_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n}{D_{2n+1}} \Sigma \mu_{h,k,l} \left[W_{2h+1,2k,2l} - U_{2h,2k,2l+1} \right] \\[2ex] r_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n}{D_{2n+1}} \Sigma \mu_{h,k,l} \left[U_{2h,2k+1,2l} - V_{2h+1,2k,2l} \right]. \end{cases}$$

Lo spostamento in parola può considerarsi una rotazione intorno alla retta (6), per la quale rotazione ogni punto subisce uno spostamento proporzionale al prodotto della sua distanza da questa retta per la 2 n^{esima} potenza della distanza del punto medesimo dall'origine delle coordinate. Questo spostamento si dirà una *rotazione di ordine 2 n + 1*, intorno alla retta suddetta, ed il parametro $\sqrt{p^2_{2n+1} + q^2_{2n+1} + r^2_{2n+1}}$ che misura il rapporto costante, dello spostamento di ogni punto, al prodotto della sua distanza dalla retta (6) per la potenza 2 n^{esima} della sua distanza dall'origine delle coordinate, si prenderà per misura della rotazione. La retta (6) si dirà *asse di rotazione*, e l'origine delle coordinate, *centro di rotazione.*

È facile vedere che i moti rotatorii di ordine qualunque si compongono colla regola del parallelogrammo, quando vengono rappresentati con un segmento che passi pel centro di rotazione, che abbia la direzione dell'asse di rotazione ed una lunghezza misurata dalla costante della rotazione. Infatti se si eseguisce una rotazione d'assi data dalle formole

$$x = \alpha_1 \, x_1 + \beta_1 \, y_1 + \gamma_1 \, z_1$$
$$y = \alpha_2 \, x_1 + \beta_2 \, y_1 + \gamma_2 \, z_1$$
$$z = \alpha_3 \, x_1 + \beta_3 \, y_1 + \gamma_3 \, z_1 ,$$

le componenti dello spostamento (5) nel nuovo sistema x, y, z sono

$$\delta x_1 = (-1)^n (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^n (R_{2n+1} \, y_1 - Q_{2n+1} \, z_1)$$
$$\delta y_1 = (-1)^n (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^n (P_{2n+1} \, z_1 - R_{2n+1} \, x_1)$$
$$\delta z_1 = (-1)^n (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^n (Q_{2n+1} \, x_1 - P_{2n+1} \, y_1)$$

con

$$P_{2n+1} = \alpha_1 \, p_{2n+1} + \alpha_2 \, q_{2n+1} + \alpha_3 \, r_{2n+1}$$
$$Q_{2n+1} = \beta_1 \, p_{2n+1} + \beta_2 \, q_{2n+1} + \beta_3 \, r_{2n+1}$$
$$R_{2n+1} = \gamma_1 \, p_{2n+1} + \gamma_2 \, q_{2n+1} + \gamma_3 \, r_{2n+1} ;$$

ciò che evidentemente dimostra la enunciata proprietà. Lo spostamento (5) può quindi considerarsi il risultato di tre rotazioni di ordine $2n + 1$ intorno agli assi x, y, z misurate rispettivamente dalle costanti p_{2n+1}, q_{2n+1}, r_{2n+1}.

Per avere un'idea maggiormente concreta della deformazione, che subisce un mezzo continuo, quando ai suoi punti si attribuiscono degli spostamenti dati dalle (5), ho ricercato in quali linee si trasformano alcuni particolari sistemi di rette e di circoli. Un calcolo molto semplice, mi ha condotto a concludere che tutte le rette che incontrano l' asse di rotazione si trasformano in linee piane, ed i circoli situati in piani normali all'asse, col centro su di esso, in altri circoli concentrici sullo stesso piano.

Non riesce poi molto difficile riconoscere, che il terzo spostamento non è rappresentabile da vettori componibili colla regola del parallelogrammo.

Se invece m è un numero pari, diverso da zero e della forma $2n + 2$, posto $n = h + k + l$, essendo h, k, l positivi o nulli, si decompongano le U, V, W in tre parti nel modo seguente:

$$
(8)\quad \begin{cases}
U_{m,0,0} = H_{2n+3,0,0} \\
U_{2h,2k,2l+2} = (-1)^{n+1} p_{2n+2}\, \varepsilon_{h,k,l} (2l+1)(2l+2) + H_{2h+1,2k,2l+2} \\
\qquad + \lambda_{h,k,l} (2l+1)(2l+2) A_{2h,2k,2l+2} \\
U_{2h,2k+2,2l} = (-1)^{n+1} p_{2n+2}\, \varepsilon_{h,k,l} (2k+1)(2k+2) + H_{2h+1,2k+2,2l} \\
\qquad + \lambda_{h,k,l} (2k+1)(2k+2) A_{2h,2k+2,2l} \\
U_{2h+1,2k+1,2l} = (-1)^{n} q_{2n+2}\, \varepsilon_{h,k,l} (2h+1)(2k+1) + H_{2h+2,2k+1,2l} \\
\qquad + \lambda_{h,k,l} (2h+1)(2k+1) A_{2h+1,2k+1,2l} \\
U_{2h+1,2k,2l+1} = (-1)^{n} r_{2n+2}\, \varepsilon_{h,k,l} (2h+1)(2l+1) + H_{2h+2,2k,2l+1} \\
\qquad + \lambda_{h,k,l} (2h+1)(2l+1) A_{2h+1,2k,2l+1} \\
U_{2h,2k+1,2l+1} = H_{2h+1,2k+1,2l+1} + (2k+1)(2l+1) \lambda_{h,k,l} A_{2h,2k+1,2l+1}
\end{cases}
$$

$$
(9)\quad \begin{cases}
V_{0,m,0} = H_{0,2n+3,0} \\
V_{2h+2,2k,2l} = (-1)^{n+1} q_{2n+2}\, \varepsilon_{h,k,l} (2h+1)(2h+2) + H_{2h+2,2k+1,2l} \\
\qquad + \lambda_{h,k,l} (2h+1)(2h+2) B_{2h+2,2k,2l} \\
V_{2h,2k,2l+2} = (-1)^{n+1} q_{2n+2}\, \varepsilon_{h,k,l} (2t+1)(2l+2) + H_{2h,2k+1,2l+2} \\
\qquad + \lambda_{h,k,l} (2l+1)(2l+2) B_{2h,2k,2l+2} \\
V_{2h,2k+1,2l+1} = (-1)^{n} r_{2n+2}\, \varepsilon_{h,k,l} (2k+1)(2l+1) + H_{2h,2k+2,2l+1} \\
\qquad + \lambda_{h,k,l} (2k+1)(2l+1) B_{2h,2k+1,2l+1} \\
V_{2h+1,2k+1,2l} = (-1)^{n} p_{2n+2}\, \varepsilon_{h,k,l} (2h+1)(2k+1) + H_{2h+1,2k+2,2l} \\
\qquad + \lambda_{h,k,l} (2h+1)(2k+1) B_{2h+1,2k+1,2l} \\
V_{2h+1,2k,2l+1} \\
\qquad = H_{2h+1,2k+1,2l+1} + (2h+1)(2l+1) \lambda_{h,k,l} B_{2h+1,2k,2l+1}
\end{cases}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
& W_{0,0,m} = H_{0,0,2n+2} \\
& W_{2h,2k+2,2l} = (-1)^{n+1} r_{2n+2} \varepsilon_{h,k,l} (2k+1)(2k+2) + H_{2h,2k+2,2l+1} \\
& \qquad\qquad + \lambda_{h,k,l} (2k+2)(2k+1) C_{2h,2k+2,2l} \\
& W_{2h+2,2k,2l} = (-1)^{n+1} r_{2n+2} \varepsilon_{h,k,l} (2h+1)(2h+2) + H_{2h+2,2k,2l+1} \\
& \qquad\qquad + \lambda_{h,k,l} (2h+1)(2h+2) C_{2h+2,2k,2l} \\
& W_{2h+1,2k,2l+1} = (-1)^{n} p_{2n+2} \varepsilon_{h,k,l} (2h+1)(2l+1) + H_{2h+1,2k,2l+2} \\
& \qquad\qquad + \lambda_{h,k,l} (2h+1)(2l+1) C_{2h+1,2k,2l+1} \\
& W_{2h,2k+1,2l+1} = (-1)^{n} q_{2n+2} \varepsilon_{h,k,l} (2k+1)(2l+1) + H_{2h,2k+1,2l+2} \\
& \qquad\qquad + \lambda_{h,k,l} (2k+1)(2l+1) C_{2h,2k+1,2l+1} \\
& W_{2h+1,2k+1,2l} = \\
& \qquad\qquad H_{2h+1,2k+1,2l+1} + \lambda_{h,k,l} (2h+1)(2k+1) C_{2h+1,2k+1,2l}
\end{aligned}
\right.
\tag{10}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
& A_{a-1,b+1,c} + B_{a,b,c} + C_{a,b+1,c-1} = 0 \\
& \Sigma \varepsilon_{h,k,l} [(2k+1)(2k+2) A_{2h,2k+2,2l} - (2h+1)(2l+1) C_{2h+1,2k,2l+1} \\
& - (2h+1)(2k+1) B_{2h+1,2k+1,2l} + (2l+1)(2l+2) A_{2h,2k,2l+2}] = 0 \\
& \Sigma \varepsilon_{h,k,l} [(2l+1)(2l+2) B_{2h,2k,2l+2} - (2k+1)(2h+1) A_{2h+1,2k+1,2l} \\
& - (2k+1)(2l+1) C_{2h,2k+1,2l+1} + (2h+1)(2h+2) B_{2h+2,2k,2l}] = 0 \\
& \Sigma \varepsilon_{h,k,l} [(2h+1)(2h+2) C_{2h+2,2k,2l} - (2l+1)(2k+1) B_{2h,2k+1,2l+1} \\
& - (2h+1)(2l+1) A_{2h+1,2k,2l+1} + (2k+1)(2k+2) C_{2h,2k+2,2l}] = 0
\end{aligned}
\right.
\tag{11}
$$

con

$$
\varepsilon_{h,k,l} = \frac{n!}{(2n+2)!} \cdot \frac{2h!}{h!} \cdot \frac{2k!}{k!} \cdot \frac{2l!}{l!}
$$

$$
\lambda_{h,k,l} = \frac{2h!\, 2k!\, 2l!}{(2n+2)!}\, ; \quad \mu_{h,k,l} = \frac{n!}{h!\, k!\, l!}\, .
$$

Le (8), (9), (10), (11) possono risolversi rispetto alle

$$
p_{2n+2}, \quad q_{2n+2}, \quad r_{2n+2}, \quad H, \ A, \ B, \ C,
$$

e posto per semplicità [1])

$$\Sigma\varepsilon_{h,k,l}\mu_{h,k,l}[(2n-2k+3)(2l+1)+(2n-2l+3)(2k+1)]$$
$$=\Sigma\varepsilon_{h,k,l}\mu_{h,k,l}[(2n-2l+3)(2h+1)+(2n-2h+3)(2l+1)]$$
$$=\Sigma\varepsilon_{h,k,l}\mu_{h,k,l}[(2n-2h+3)(2k+1)+(2n-2k+3)(2h+1)]=D_{2n+2}$$

si ricava

$$(12)\quad\begin{cases} p_{2n+2}=\dfrac{(-1)^{n+1}}{D_{2n+2}}\Sigma\mu_{h,k,l}[U_{2h,2k+2,2l}-W_{2h+1,2k,2l+1} \\ \qquad\qquad -V_{2h+1,2k+1,2l}+U_{2h,2k,2l+2}] \\ q_{2n+2}=\dfrac{(-1)^{n+1}}{D_{2n+2}}\Sigma\mu_{h,k,l}[V_{2h,2k,2l+2}-U_{2h+1,2k+1,2l} \\ \qquad\qquad -W_{2h,2k+1,2l+1}+V_{2h+2,2k,2l}] \\ r_{2n+2}=\dfrac{(-1)^{n+1}}{D_{2n+2}}\Sigma\mu_{h,k,l}[W_{2h+2,2k,2l}-V_{2h,2k+1,2l+1} \\ \qquad\qquad -U_{2h+1,2k,2l+1}+W_{2h,2k+2,2l}] \end{cases}$$

(Continua).

1) È opportuno osservare, che il valore qui attribuito a D_{2n+2} coll'altro assegnato a D_{2n+1} nel principio di questo §, determinano completamente il significato di D_m qualunque sia il numero intero rappresentato da *m*.

Sul metodo di Cailletet e Colardeau per la determinazione del punto critico; nota del dott. G. P. GRIMALDI.

Nel Marzo 1891 i sigg. Cailletet e Colardeau hanno pubblicato [1]) un nuovo metodo per la determinazione del punto critico dei corpi, il quale presenta sui metodi abituali questo vantaggio, che permette di operare dentro recipienti metallici opachi.

Tale metodo è il seguente: si racchiudono successivamente in un recipiente di volume costante diverse quantità del corpo da cimentare, e per ognuna di esse si determina la pressione necessaria a mantenere costante il volume, alle diverse temperature. Le diverse quantità di sostanza impiegate devono essere tali, che per nessuna di esse il corpo passi allo stato di vapore soprariscaldato, o sia liquefatto totalmente prima che si raggiunga la temperatura critica, ma che vi arrivi sempre allo stato di vapore saturo.

Ciò posto, se si costruisce un diagramma, nel quale si prendono come ascisse le temperature, e come ordinate le pressioni ottenute a volume costante, per ogni quantità di liquido impiegato si ottiene una curva. Le diverse curve, secondo gli Autori, coincidono fino a un certo punto, al di là del quale ognuna di esse prenderà una direzione particolare. L'ascissa del punto d'incontro dà la temperatura critica, l'ordinata la pressione critica.

In una Nota successiva [2]), gli Autori descrivono alcune esperienze anteriormente fatte con l'acqua seguendo il metodo suesposto e danno il diagramma delle varie curve trovate. Essi dicono in proposito: « I punti che hanno servito al tracciato di questa figura sono in numero di 60 circa, e sono stati ottenuti per mezzo di sei serie di esperienze fatte con altrettante diverse quantità di acqua: le sei curve ottenute separatamente in ogni serie, coincidono fino ad un punto, che corrisponde sensibilmente all'ascissa di 360°; a partire da questa le sei curve divergono nettamente, e ciascuna di esse prende una direzione speciale.

1) *Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences*, T. CXII, pag. 563. 1891.
2) *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences*. T. CXII, pag. 1170, 25 Maggio 1891.

Noi dobbiamo concludere che la temperatura critica dell'acqua, determinata dall'ascissa di questo punto di divergenza, è di 365° ».

In una successiva edizione del detto lavoro [1]), gli Autori osservano che se si facesse variare fra limiti troppo grandi le quantità di liquido impiegate (esclusi sempre i casi estremi già di sopra accennati) le curve cesserebbero di separarsi sensibilmente in un punto unico; quindi l'esperienza deve essere condotta in modo che le quantità d'acqua variino fra limiti sufficientemente ristretti. Essi però non dicono quali sieno stati per l'acqua tali limiti, nè danno i risultati numerici delle loro misure.

Gli Autori poi soggiungono che, per assicurarsi dell'esattezza del loro metodo, hanno voluto verificarlo sopra un corpo di cui il punto critico fosse conosciuto. Per ciò fare essi ricorsero a due esperienze di Cagniard de Latour, fatte con diversi rapporti fra la capacità del tubo e la quantità di liquido impiegato. In queste esperienze, assieme alle temperature, erano state misurate, almeno in modo approssimativo, in atmosfere, le pressioni, mediante un manometro ad aria compressa.

Queste condizioni, dicono gli Autori, sono precisamente quelle delle loro ricerche: essi hanno dunque potuto costruire, coi soli dati di Cagniard de Latour due curve, ed hanno constatato che si conservano parallele fino alla temperatura di 190° circa e divergono in seguito *della maniera la più netta*. L'ordinata del punto di divergenza corrisponde, secondo gli Autori, alla pressione di 38 atm.: valori questi ammessi oggidì per la temperatura e pressione critica dell'etere.

Poco persuaso della attendibilità di una simile verifica [2]) mi è parso però importante il sottoporre il metodo del Cailletet

1) *Journal de Physique*. T. X, 2. série, pag. 383, 1891.

2) Le ragioni che mi inducono a non attribuire alla verifica in parola molto peso sono le seguenti:

Gli Autori non dicono quali sono le esperienze di Cagniard de Latour che hanno servito alla costruzione delle loro curve: però dalle ricerche da me fatte risulta che i lavori del detto Autore sul punto critico sono pubblicati nei T. XXI, XXII, XXIII (serie seconda) degli *Annales de Chimie et de Phys.* (1822-1823): altre memorie non ho potuto rintracciare, e non sono neanche menzionate nell'accuratissima bibliografia del Poggendorff. Fra le esperienze del Cagniard de Latour pubblicate in tali volumi,

e Colardeau ad un controllo rigoroso e completo, per vedere fino a qual punto si può ritenere esatto il punto critico dell'acqua così determinato. Ho voluto perciò vedere se esistessero altri dati sperimentali relativi a corpi dei quali il punto critico è bene determinato, che permettessero di applicare ad essi il metodo suaccennato, ed esaminando tale questione mi sono persuaso che non occorre perciò avere delle serie di esperienze ottenute misurando sperimentalmente le pressioni prodotte a diverse tempe-

due sole serie sembrano prestarsi alla verifica desiderata dai sigg. Cailletet e Colardeau e sono quelle pubblicate a pag. 411-412 del T. XXII e che qui trascrivo:

VOLUME ALLO STATO DI VAPORE O CAPACITÀ DEL TUBO 20 PARTI

Temperatura Réaumur	Pressioni quando il volume allo stato liquido è		Differenze	Temperatura Réaumur	Pressioni quando il volume allo stato liquido è		Differenze
	7 parti	8 1/2 parti			7 parti	8 1/2 parti	
°	atm			°	atm	atm	atm
80	5,6			180	68,8	63,5	— 5,0
90	7,9	atm	atm	190	78,0	66	—12,[illegible]
100	10,6	10,0	+3,4	200	86,3	70,5	—15,8
110	12,9	17,5	+4,6	210	92,8	74	—18,8
120	18,0	22,5	+4,5	220	104,1	78	—26,1
130	22,2	28,5	+6,3	230	112,7	81	—31,7
140	28,3	35	+6,7	240	119,4	85	—34,4
150	37,5	42	+4,5	250	123,7	89	—34,7
160	48,5	50,5	+2,0	260	130,9	94	—36,9
170	59,7	58	—1,7				

Se si costruiscono graficamente le curve date dai soprariferiti valori, prendendo come ascisse le temperature e come ordinate le pressioni, si vede che le curve non sono mai parallele, ma presentano curvature diverse, ed invece di divergere nei punti corrispondenti alla temperatura di 190° c. convergono fino *ai punti aventi per ascissa 210° c. dove si incontrano:* ciò che del resto, indipendentemente dalle costruzioni grafiche, si può dedurre dalla semplice ispezione delle differenze delle due serie di valori. La verifica dunque darebbe un risultato contrario a quello enunciato dagli Autori; ma io credo che non si debba attribuire alla medesima alcun valore, nè prò, nè contro, perchè il fatto che le curve non coincidono al disotto della temperatura critica, (neanche approssimativamente) nella qualcosa gli Autori stessi convengono, basta a far rigettare qualunque conclusione basata su tali esperienze.

Del resto le ricerche di Cagniard de Latour hanno carattere più qualitativo che quantitativo; e l'A. stesso, che mostra un intuito veramente sorprendente e geniale del fenomeno, ammette che si sieno *glissés* nelle sue esperienze *quelques inexactitudes*, e dice che le sue cifre devono considerarsi come *premiers aperçus*.

Infine non è dimostrato che il volume occupato dall'etere rimanesse costante: anzi dalla descrizione dell'apparecchio si rileva che a mano a mano che si comprimeva l'aria del manometro che misurava la pressione, lo spazio occupato dall'etere doveva aumentare.

rature da varie quantità di materia, racchiuse successivamente nello stesso volume, ma che da qualunque serie di isoterme di un corpo si possono dedurre quante si vogliano curve di Cailletet e Colardeau con un procedimento molto semplice, che qui appresso descrivo.

Supponiamo di aver tracciato l'isoterma dell'unità di massa di un corpo, ad una certa temperatura, prendendo come ascisse le pressioni e come ordinate i volumi. È chiaro che se vogliamo costruire l'isoterma alla stessa temperatura di k unità di massa del corpo, bisognerà conservare le medesime ascisse e moltiplicare per k le ordinate. Difatti, poichè lasciando costante la temperatura e la pressione, rimane costante la densità del corpo, il volume occupato dal medesimo aumenterà proporzionalmente alla sua massa. Suppongasi ora di aver costruito diverse di tali isoterme corrispondenti a quantità diverse di liquido. Se si intersecano queste curve con una retta parallela all'asse delle ascisse, corrispondente all'ordinata di un dato volume v_0 (che è quello costante che si vuol prendere come base delle misure e che corrisponderebbe al volume del recipiente adoperato dal Cailletet e Colardeau, se effettivamente si eseguissero le esperienze) le ascisse dei punti d'incontro delle diverse curve daranno le pressioni necessarie a fare occupare uno stesso volume a diverse quantità di liquido.

Si ripeta l'operazione con le isoterme di altre temperature e si otterranno così le serie di punti necessarie a costruire le curve di Cailletet e Colardeau.

Questo procedimento, rigoroso in principio, presenta l'inconveniente di essere troppo lungo nell'applicazione pratica; poichè richiede la costruzione di molte curve grafiche, tante quanti sono i punti che si vogliono ottenere.

Si può però seguire il procedimento più semplice, che qui passo ad esporre.

Suppongasi che nel percorrere l'isoterma di t^0 l'unità di massa del corpo alla pressione p_0 occupi il volume v_0, preso, anche in questo caso, come base delle misure, e supponiamo che variando la pressione fino ad assumere per esempio il valore p sia v_p il volume corrispondente. È chiaro che il rapporto inverso

dei volumi $\frac{1}{\frac{v_p}{v_0}} = \frac{v_0}{v_p} = \delta_p$ esprimerà il rapporto fra la densità del corpo alla pressione p e quella alla pressione p_0, ed è facile vedere che esprimerà pure la massa del corpo necessaria per occupare alla pressione p il volume primitivo v_0.

Ora se si costruisce una curva nella quale, rimanendo costante la temperatura le ascisse rappresentino le pressioni, e le ordinate i valori corrispondenti di δ_p si potrà conoscere la quantità di liquido necessaria per avere alle diverse pressioni il volume costante v_0. Ripetendo la stessa operazione per altre temperature, lasciando v_0 sempre invariato, si avrà una curva per ogni temperatura, e l' insieme delle diverse curve formerà una rete analoga a quella delle isoterme usuali.

Se ora si cercano nelle diverse curve le pressioni corrispondenti alle diverse temperature, ad uno stesso valore di δ si potranno costruire quante si vogliano curve del Cailletet, certamente con esattezza di gran lunga maggiore di quella che si può raggiungere eseguendo direttamente le misure.

Trovato il metodo di fare le verifiche, restava ad applicarlo ad un corpo del quale fosse noto il punto critico e si possedesse una serie particolareggiata di isoterme. Ho creduto conveniente di scegliere l' anidride carbonica, sulla quale si hanno dati sperimentali sufficienti e bene accertati. Nei miei calcoli mi sono poi servito della serie di isoterme pubblicata recentemente da Amagat [1]), perchè risultante da misure molto estese, eseguite da uno sperimentatore di prim' ordine su un prodotto di grande purezza.

Amagat nelle sue tabelle pubblica per ogni temperatura i valori dei prodotti pv alle diverse pressioni; da questi ho calcolato per ogni temperatura i valori di v_p e di $\frac{v_0}{v_p} = \delta_p$ alle diverse pressioni, che riporto nelle seguenti tabelle. Le pressioni sono espresse in atmosfere: l' unità di volume è quella stessa di Amagat, cioè il volume occupato dal gas a 0° ed alla pressione di una atmosfera. Per volume base v_0 ho scelto arbitrariamente e per semplicità di calcolo il volume 0,0100, che è quello che l' acido carbonico occupa alla temperatura di 40° ed alla pressione di 68^{atm}, 7.

1) *Comptes Rendus de l' Acad. des Sciences*, T. CXII. 8 Dicembre 1890.

$t = 0^\circ$

p	v_p	δ_p
31	0,0238	0,4206
33	0,0215	0,4651
34	0,0204	0,4902
35	0,00214	4,673
37	0,00213	4,695
50	0,00210	4,762

$t = 10^\circ$

p	v_p	δ_p
33	0,0238	0,4206
34	0,0228	0,4386
35	0,0218	0,4587
37	0,0205	0,4878
40	0,0176	0,5682
44	0,0148	0,6757
45	0,00233	4,2928
50	0,00229	4,3668

$t = 20^\circ$

p	v_p	δ_p
35	0,0238	0,4202
37	0,0219	0,4566
40	0,0197	0,5076
44	0,0170	0,5882
45	0,0164	0,6097
48	0,0147	0,6802
50	0,0136	0,7352
53	0,0120	0,8334
55	0,0110	0,9091
56	0,0104	0,9616
57	0,0026	3,8461
60	0,0025	4,000
75	0,0024	4,167

$t = 30°$

p	v_p	δ_p	p	v_p	δ_p
37	0,0238	0,4202	65	0,00916	1,0916
40	0,0215	0,4651	68	0,00786	1,2722
45	0,0182	0,5495	70	0,00686	1,4578
48	0,0165	0,6061	71	0,00331	3,0211
50	0,0155	0,6452	72	0,00310	3,2259
53	0,0141	0,7092	74	0,00296	3,3783
55	0,0132	0,7576	75	0,00292	3,4248
60	0,0111	0,9009	78	0,00283	3,5336

$t = 32°$

p	v_p	δ_p	p	v_p	δ_p
40	0,0218	0,4587	72	0,00682	1,4665
45	0,0185	0,5405	73	0,00630	1,5873
50	0,0158	0,6329	74	0,00547	1,8281
55	0,0135	0,7407	74,5	0,00456	2,1930
60	0,0116	0,8621	75	0,00357	2,8011
65	0,00967	1,0341	76	0,00328	3,0488
68	0,00850	1,1765	78	0,00303	3,3004
70	0,00771	1,2970			

$t = 35°$

p	v_p	δ_p	p	v_p	δ_p
40	0,0223	0.4484	74	0,00727	1,3947
45	0,0190	0,5263	75	0,00680	1,4706
50	0,01631	0,6135	76	0,00638	1,5674
55	0,01404	0,7143	78	0,00538	1,8587
60	0,01207	0,8264	80	0,00397	2,5189
65	0,01029	0,9709	82	0,00342	2,9239
68	0,00928	1,0775	85	0,00314	3,1847
70	0,00860	1,1625	90	0,00294	3,4013

$t = 35°$

p	v_p	δ_p	p	v_p	δ_p
40	0,0231	0,4329	70	0,00961	1,0406
45	0,0195	0,5128	75	0,00817	1,2240
48	0,0180	0,5556	80	0,00675	1,4849
50	0,01705	0,5882	82	0,00601	1,6639
53	0,01566	0,6369	85	0,00512	1,9531
55	0,01479	0,6757	90	0,00379	2,6386
60	0,01287	0,7752	95	0,00331	3,0212
65	0,01117	0,8929	100	0,00309	3,2362
68	0,01022	0,9804	110	0,00284	3,5211

Per ogni temperatura ho costruito su grande scala una curva coi valori sopra riportati, prendendo come ascisse le pressioni e come ordinate i valori δ_p (nelle ascisse un' atmosfera era rappresentata da un centimetro e nelle ordinate un' unità di δ_p da 10 centimetri); dalle dette curve, che riuscirono perfettamente regolari, ho ricavato le pressioni corrispondenti ad uno stesso valore di δ, alle diverse temperature, per valori di δ varianti da 1.7 a 2,7, che sono a un dipresso i limiti delle quantità di liquido che si possono impiegare, quando si vuole che l' anidride carbonica giunga alla temperatura critica, allo stato di vapore saturo.

I risultati sono riportati nella seguente tabella.

Se si esamina detta tabella, prescindendo da qualsiasi costruzione grafica, si vede che le diverse curve di Cailletet e Colardeau, ottenute con i valori ivi contenuti, son ben lungi dal separarsi in un punto unico, che dovrebbe corrispondere al punto critico. Prendendo due curve, nelle quali le quantità di liquido variano nel rapporto di 1 a 1,6, il punto d' intersezione corrisponde ad una temperatura inferiore ai 30°, circa 28°. Se si prendono invece curve corrispondenti a quantità di liquido che variano di un quarantesimo circa, il punto d' intersezione corrisponde ad una temperatura di 35° circa; tra questi due limiti, con una opportuna scelta delle curve, si può ottenere qualsiasi valore della temperatura critica.

Quantita di liquido δ	Pressioni necessarie per ridurle al volume costante 0,01 alle temperature di						
	0°	10°	20°	30°	32°	35°	40°
	atm	atm	atm	atm	atm	atm	atm
1.7	34,6	44.5	56.5	70.4	73.5	77,1	82.5
1,8	34,6	44,5	56,5	70,5	73,9	77,7	83,6
1,9	34,6	44,5	56,5	70,5	74,2	78,2	84,6
2,0	34.6	44,5	56.5	70,6	74.3	78,6	85,4
2,05	34,6	44,5	56.5	70.6	74,4	78.7	85,8
2,10	34.6	44.5	56,5	70,6	74,4	78,9	86,2
2,15	34,6	44,5	56.5	70.6	74,5	79,1	86,5
2,20	34,6	44,5	56,5	70,6	74,5	79,2	86,8
2,25	34,6	44,5	56,5	70,6	74,5	79,3	87,2
2,30	34,6	44,5	56,5	70,7	74,6	79,4	87,6
2,35	34.6	44,5	56.5	70,7	74,6	79,6	87,9
2,40	34,6	44,5	56,5	70,7	74,6	79,7	88,3
2,45	34,6	44,5	56,5	70,7	74,7	79,9	88.6
2,50	34,6	44.5	56,5	70,7	74,7	80,0	89,0
2,55	34.6	44,5	56.5	70.7	74.7	80,1	89,3
2,6	34,6	44,5	56,5	70.7	74,8	80,3	89,7
2,7	34,6	44,5	56,5	70,8	74,8	80,7	90,6

Il metodo di Cailletet e Colardeau applicato all' anidride carbonica riesce adunque di una approssimazione piuttosto grossolana e che lascia molto campo all' arbitrio di chi traccia le curve. Teoricamente si dovrebbero scegliere curve relative a quantità di liquido pochissimo differenti fra di loro: praticamente poi in questo caso le curve quasi coincidono, ed il loro punto netto di separazione corrisponde ad una temperatura molto più elevata della temperatura critica.

Ne consegue una indeterminazione che lascia incerti sul valore esatto di tale temperatura, e che sembra dimostrare che la nota legge, che la tensione massima del vapore saturo ad una data temperatura è indipendente dal volume da questo occupato, non sia applicabile, in vicinanza della temperatura critica, al disotto della medesima, come il metodo di Cailletet e Colardeau richiederebbe.

Da tali risultati, ricavati da una serie di misure tanto particolareggiata, si può concludere che per l' anidride carbonica il metodo di Cailletet e Colardeau conduce a risultati che lasciano una incertezza di ± 10 % circa; ed è più che probabile che per

altri liquidi nei quali il passaggio dei due stati diversi ad uno stato unico avvenga meno bruscamente, si ottengono risultati meno approssimati.

D' altra parte, osservando attentamente il diagramma descritto da Cailletet e Colardeau per l'acqua, si vede che le diverse curve, specialmente in vicinanza e al disotto del punto d'incontro, distano notevolmente dai punti sperimentali: quindi il farli riunire in un punto piuttosto che in un altro, rimane fra certi limiti, arbitrario.

L' indeterminazione in questo caso sembra dover essere almeno ± 5°, vale a dire che la temperatura critica dell'acqua rimane circoscritta dalle misure di Cailletet e Colardeau a un dipresso fra i medesimi limiti che risultano dalla deduzione di Strauss (370°) e dalle misure indirette di Nadeydine (358°).

Con queste osservazioni non ho voluto contestare la grande importanza che ha il lavoro di Cailletet e Colardeau, per quel che riguarda la determinazione della curva della tensione massima del vapor acqueo. Ho voluto soltanto dimostrare che per la determinazione del punto critico il loro metodo, rigorosamente applicato, conduce a risultati pochissimo precisi; e tale dimostrazione parmi tanto più necessaria dopo che il sig. Hinrichs attribuisce in una recente Nota [1]) tal grado di precisione al metodo di Cailletet e Colardeau da riprodurre fotograficamente le curve ingrandite per trovare che il punto d'incontro avviene a 364° anzichè a 365°!.

1) *Zeitschrift für Physik. Chemie.* Bd. VIII, s. 680. 1891.

SULLE PROPRIETA TERMICHE DEI VAPORI; MEMORIA
DI ANGELO BATTELLI

PARTE SECONDA.

Temperatura, pressione e volume critici del solfuro di carbonio e dell' acqua

I. — *Esperienze sul solfuro di carbonio.*

Per uno studio completo sulle proprietà termiche di un vapore, è necessario conoscerne con esattezza anche la temperatura, il volume e la pressione critica.

In questa Memoria riferisco per l' appunto i risultati delle esperienze che ho fatte allo scopo di determinare questi tre elementi per i vapori di solfuro di carbonio e di acqua, che sono fra quelli pei quali ho intrapreso lo studio delle proprietà termiche.

Il punto critico del solfuro di carbonio fu determinato da pochissimi, e da nessuno, se si eccettuano le esperienze grossolane di Cagniard de la Tour, furono trovati contemporaneamente tutti e tre gli elementi: temperatura, volume e pressione. Inoltre, molto probabilmente per causa del diverso grado di purità della sostanza, i risultati dei diversi sperimentatori non sono fra loro che discretamente concordanti.

Le ricerche intorno al punto critico dell' acqua sono più rare di quelle riferentesi al solfuro di carbonio, a cagione delle grandissime difficoltà che esse oppongono.

Cagniard de la Tour [1]) fece parecchi tentativi per riuscire allo scopo. Sin da principio s' avvide che l' acqua scaldata in tubi di vetro ne alterava la trasparenza al punto da impedire la vista dell' interno: pensò quindi di diminuire tale alterazione aggiungendo all' acqua una piccola quantità di carbonato di sodio. Difatti in questo modo riuscì a vedere, sebbene a grande stento che *ad una temperatura poco diversa da quella dello*

1) *Ann. de Chim. et Phys.* Série 2, vol. 21, p. 127 e p. 178, 1822; e vol. 23, p. 267, 1823.

zinco fondente, l'acqua poteva ridursi totalmente in vapore in uno spazio all' incirca quadruplo del suo volume primitivo.

In altre prove Cagniard de la Tour mescolando solfuro di carbonio e clorato di potassio all'acqua, riuscì ad impedire la scomposizione del vetro, senza però poter ridurre l'acqua nei tubi totalmente in vapore.

Nessuno fece in seguito nuovi tentativi per trovare il punto critico dell'acqua, fino al 1882, in cui O. Strauss [1]) cercò di riuscire nell'intento per mezzo del calcolo di formule non pienamente dimostrate.

Egli ottenne:

La temperatura critica = 370° C. ± 5°
la pressione » = 195,5 atm.

Con un metodo indiretto tentò tre anni dopo il Nadeydine [2]) di ottenere in modo più preciso la temperatura critica ed il volume critico dell'acqua; ed ottenne:

La temperatura critica = 358°,0 C.
il volume » = 2cc,331 *per un gram. di sostanza.*

Il suo metodo però può lasciar adito a qualche dubbio intorno all'esattezza dei risultati.

Da ciò risulta adunque che non solo mi erano necessarie dirette esperienze per stabilire con sicurezza il punto critico del solfuro di carbonio e dell'acqua, adoperando le sostanze purissime e sopratutto quegli stessi campioni dei quali vengo studiando le altre proprietà termiche; ma, in particolar modo per l'acqua, era riempire una lacuna il determinare nel punto critico tutti e tre gli elementi: temperatura, volume e pressione.

Descrizione dell' apparecchio pel solfuro di carbonio.

Mi fu necessario adoperare mezzi diversi per le determinazioni sopra il solfuro di carbonio e per quelle sull'acqua, poichè l'apparecchio più comodo e più sicuro, che mi servì pel

1) *Journ. de la Soc. Phys. Chim. Russe.* vol. 14, p. 510, 1882.

2) *Mélang. Phys. et Chim. tirés du Bullet. de l'Acad. de S. Pétersb.*, vol. 12, p. 299, 1885.

primo dei due liquidi, non poteva adattarsi, come si vedrà, per il secondo.

L'apparecchio pel solfuro di carbonio trovasi rappresentato nella fig. 1 (tav. II).

1° *Campanella.* — Essa era a pareti robustissime, della lunghezza di 35 cm. e del diametro di 15 mm.

La sua graduazione era stata campionata e ne era stato determinato il coefficiente di dilatazione termica, e quello di espansione.

Essa venne saldata inferiormente a un tubo *a* a forma di U, con l'estremità libera molto breve, dalle pareti robustissime, e del diametro di circa 1 centimetro. Poscia fu lavato e pulito il tutto accuratamente. Infine si fece bollire del mercurio nella campanella e nel tubo *a*, e s'introdusse il solfuro di carbonio dentro boccettine di vetro nella campanella stessa. Allora l'estremità libera del tubo *a* venne saldata all'apparato, che doveva servire per produrre le pressioni.

2° *Stufa.* — La stufa nella quale la campanella era collocata per essere mantenuta ad elevate temperature, era costituita da un recipiente R' di ottone (fig. 1) il quale era sostenuto mediante piedi di legno dentro un altro recipiente R'' pure di ottone, alquanto più lungo e più largo. Da ultimo questo secondo recipiente era posto dentro un terzo R''' col quale era in comunicazione mediante le due aperture *c c'*.

Le pareti dei tre recipienti situate dalla medesima parte P portavano ciascuna una finestra longitudinale; e le tre finestre erano poste in fila fra di loro, per guisa che mediante un cannocchiale si potesse vedere nell'interno del recipiente R'.

Altre tre larghe finestre longitudinali erano praticate nelle tre pareti situate ad angolo retto colle tre precedenti; ed erano anch'esse poste in fila tra loro, in modo che lo specchio S poteva riflettere nell'interno del recipiente R' un fascio di raggi luminosi, che riceveva da una larga fiamma a gas.

Le finestre praticate nelle pareti di questi recipienti erano chiuse con lastre di vetro, le quali erano ben cementate alle rispettive pareti con una pasta di minio e biacca, specialmente nel recipiente interno R', in guisa da impedire che l'aria e i vapori si scambiassero fra i recipienti R' ed R''.

Infine le pareti interne dei due recipienti R'' ed R''' furono spalmate con uno strato di cemento, per ottenere maggior regolarità nella temperatura.

Il fondo del recipiente esterno R''' era pieno del liquido che doveva mantenere, bollendo, la temperatura della stufa.

Il vapore che si svilupava dal liquido in ebollizione, oltre ad occupare lo spazio esistente fra i due recipienti R'' ed R''', entrava anche nel recipiente R'', passando per le due aperture *c* e *c'*. Quindi circolava per il tubo metallico *t*, che era circondato dal refrigerante F; ivi il vapore veniva condensato, e quindi ricadeva al fondo del recipiente R''', dove andava a terminare il tubo *t*.

Con petroli opportunamente frazionati, e utilizzando la proprietà che avevano di alzare leggermente la loro temperatura di ebollizione, dopo aver bollito per alcun tempo, riuscii ad ottenere nelle stufe temperature costanti, differenti fra di loro anche di $^1/_{10}$ di grado soltanto.

Per misurare la temperatura nell' interno del recipiente R' adoperai nelle prime esperienze un termometro diviso in gradi, accuratamente campionato mediante un termometro ad aria. Ma in seguito, sia perchè riusciva molto incomodo il leggere col cannocchiale dentro il recipiente R' contemporaneamente l' altezza del menisco del mercurio nella campanella e la temperatura sul termometro; sia perchè il termometro a mercurio, per effetto del continuo spostamento dello zero, non mi dava l' esattezza che desideravo, sostituii ad esso una coppia termoelettrica formata con zinco e pakfong, graduata con tutta cura prima e dopo le esperienze.

3.° *Disposizione per avvertire con esattezza il primo istante della condensazione.* — A questo scopo fu adoperato il medesimo espediente che adottai nello studio del vapore d' etere rispetto alle leggi di Boyle e di Gay-Lussac [1]), ossia introdussi in cima alla campanella, prima di farne la calibrazione, uno specchietto di lamina di acciaio larga circa 6 mm. e lunga 4 cm., tenuta fissa nella sua posizione da una morsetta che si appoggiava sopra due lastrine di acciaio, le quali erano premute con-

1) *Loc. cit.*

tro le pareti della campanella da una molla, pure di acciaio, in modo da essere certi che le scosse dell' apparecchio non producessero nessuno spostamento nello specchio.

Siccome la luce veniva mandata dallo specchio S dentro il recipiente R' in direzione all'incirca perpendicolare a quella dell'asse del cannocchiale che serviva per osservare la campanella, così avevo potuto dare allo specchio una posizione obliqua rispetto ai raggi luminosi, in modo che la superficie della lastrina d'acciaio guardata col cannocchiale appariva lucentissima.

Accanto alla campanella vennero poi collocate, in uno stesso piano colla prima, altre due lastrine d' acciaio egualmente lucenti, che servivano per confronto.

Il punto vero del principio della condensazione venne determinato facendo le esservazioni nei due istanti in cui la macchia appariva e spariva dalla lastrina di mezzo, mentre lentamente si cresceva e si diminuiva la pressione, e prendendo la media delle due determinazioni.

4.° *Apparecchio generatore delle pressioni.* — Coll'espediente che segue mi posi nel caso di produrre compressioni fortissime, essendo libero nello stesso tempo di variarle a mio piacimento anche di quantità piccolissime, sia in aumento, sia in diminuzione.

L'estremità libera del tubo *a* congiunto alla campanella, dopo fatta l'introduzione delle boccette contenenti il solfuro di carbonio, venne saldata ad un tubo di vetro *b* dalle pareti grossissime, del diametro circa di un centimetro e lungo un metro e mezzo circa, il quale verso l'alto si ripiegava ad angolo retto, e quindi si volgeva di nuovo in basso entrando nel recipiente V, come vedesi nella fig. 1. Questo medesimo tubo venne riempito di mercurio fino a rimanerne occupato tutto il tratto orizzontale. Nell'interno del recipiente V il tubo andava a saldarsi ad una canna C robustissima di vetro del diametro di 2 centimetri circa, la quale, incurvandosi cinque volte, formava tre specie di anelli schiacciati, intrecciantisi in modo che l'insieme occupasse il minor spazio possibile.

La canna venne riempita di etere solforico, in guisa che questo penetrasse anche nel tubo *b*, e arrivasse al contatto del mercurio.

Dall'altra estremità la canna stessa venne saldata ad un altro robusto tubo di vetro *b'*, del diametro di circa un centimetro e della lunghezza di due metri circa, il quale dopo aver camminato per un certo tratto in discesa, si ripiegava verticalmente verso il basso, terminando in un tubo a forma di U, che metteva la comunicazione col manometro. Anche questo tubo venne poi in parte occupato con etere solforico, e per il resto, come si vedrà, riempito con mercurio.

Il recipiente V che conteneva la canna era di forma conica ed aveva tali dimensioni da toccare quasi con le sue pareti la canna stessa. Esso era sostenuto dal disopra mediante un arco di ferro che aveva le sue estremità congiunte alla bocca del recipiente, e che alla sua volta era portato da un braccio di ferro infisso nella parete della stanza. Nello stesso tempo il recipiente V era contenuto entro un secondo recipiente V', della medesima forma, ma di dimensioni leggermente più grandi, per modo che fra le pareti dei due recipienti esisteva tutt' all' intorno una distanza di due o tre millimetri circa. Infine il recipiente V' era collocato nell' interno di un terzo recipiente V" nel cui fondo poggiavano i tre dadi di ferro, a cui era congiunto esternamente il fondo del recipiente V'.

Il recipiente V" era pieno, fino quasi alla bocca, di olio, che si poteva portare a temperature diverse per mezzo di una lampada sottoposta. Nell' olio poteva muoversi un agitatore, il quale durante le esperienze, veniva mantenuto in movimento da un piccolo motore. La fiamma era sostenuta da un braccio scorrevole lungo un'asta verticale, di modo che si poteva a piacimento avvicinare o allontanare dal fondo del recipiente.

Il recipiente V era chiuso da un coperchio spalmato internamente ed esternamente di un grosso strato di cemento, ed i fori attraverso cui passavano i tubi *b* e *b'* erano pure chiusi con cemento. Il recipiente V' era chiuso invece da un anello molto spesso di cuoio, il quale era congiunto alla bocca del recipiente V', e poteva scorrere lungo le pareti del recipiente V.

Infine il recipiente V" portava un ordinario coperchio metallico.

L'insieme dei recipienti V' e V" e la lampada sottoposta erano sostenuti da un tavolo che, per mezzo della vite che lo

reggeva, poteva essere alzato ed abbassato: cosicchè si potevano a volontà avvicinare o allontanare fra di loro le pareti dei recipienti V e V'.

Intanto per il riscaldamento che in tal modo si poteva produrre nel recipiente V, l'etere solforico contenuto nella canna C si dilatava, esercitando compressione contemporaneamente nella campanella contenente il solfuro di carbonio e nel manometro.

La difficoltà più grande era quella di mantenere costante questa pressione, ossia di mantenere costante la temperatura nell'interno del recipiente V.

Il metodo dei soliti regolatori della temperatura non corrispose allo scopo: dopo diversi tentativi riuscii nell'intento mantenendo sotto il recipiente V" una fiamma costante per mezzo di un regolatore della fiamma, già da me altra volta costruito [1], e circondando lo stesso recipiente V" con un largo tubo metallico (fra le pareti del tubo e del recipiente era una distanza dai due ai tre centimetri), il quale andava a poggiare sulla superficie del tavolo.

Due lastre collocate sul coperchio del recipiente difendevano poi i tubi *b* e *b'* dai gas molto caldi che salivano lungo il tubo metallico.

Un' altra difficoltà consisteva nel poter abbassare di pochissimo la temperatura nell' interno del recipiente V, onde produrre una piccola diminuzione nella compressione esercitata sul vapore, senza dover aspettare un tempo troppo lungo. A tal uopo non si adattava il sistema di allontanare la fiamma, perchè, oltre al produrre un abbassamento di temperatura per lo più troppo forte, richiedeva poi molto tempo prima di lasciar stabilire solo discretamente l'equilibrio nella temperatura dell'interno del recipiente V. Mi servì assai bene invece il sistema di allontanare alquanto il recipiente V' dal recipiente V, girando opportunamente la vite che reggeva la superficie del tavolo. Per tal modo la pressione si abbassava lentamente di pochi centimetri di mercurio, e poi ritornava lentissimamente a salire.

1) *Un regolatore della pressione del gas.* di A. Battelli e M. Martinetti. *L'Ingegneria civile* XII.

Poco prima di salire essa rimaneva per un poco quasi assolutamente costante, tanto che mi dava tutto il tempo di fare una buona determinazione, dopo dieci minuti al più dacchè avevo mosso il recipiente V'.

Avvicinavo o allontanavo invece la fiamma dal fondo del recipiente V" quando volevo produrre nella pressione un considerevole mutamento.

5.° *Manometro.* — Il manometro, che era ad aria compressa, si componeva di tre tubi dalle pareti grossissime, e ben saldati insieme (fig. 1). Il tutto era congiunto direttamente al tubo *b'*, che conduceva all'apparecchio di compressione; ma prima di fare tale congiunzione, nello stesso tubo venne versato dell'etere in modo che riempisse tutto il tubo e andasse a congiungersi all'etere che trovavasi nella canna C.

Indi venne delicatamente inclinato l'apparecchio, in modo che l'estremità libera del tratto ad U del tubo *b'* rimanesse alquanto più alta del tratto trasversale; e fu versato mercurio nello stesso tubo fino a che arrivasse ad occupare quasi tutto il tratto trasversale che, ad onta dell'inclinazione data all'apparecchio, rimaneva ancora leggermente disposto in discesa dalla parte del tratto ad U.

Fu poi estratto l'etere rimasto dalla parte aperta del tubo *b'* a galla sul mercurio: ed il mercurio stesso venne asciugato accuratamente con ripetuti riscaldamenti.

Tutti e tre i tubi M, M' ed M" erano divisi in millimetri, ed erano stati precedentemente calibrati con grande cura.

Dopo aver saldato al tubo M il tubo M', fu computato il volume compreso nel tratto della saldatura, da una delle ultime divisioni del tubo M ad una delle prime del tubo M'; e così quello compreso nel tratto della saldatura fra i tubi M' ed M", da una delle ultime divisioni del tubo M' ad una delle prime del tubo M".

I tubi vennero lavati con acido nitrico, con acqua distillata e con alcool, e poi asciugati perfettamente.

Allora il tubo M venne saldato al tubo *b'*; e quindi si tolse l'inclinazione data precedentemente all'apparecchio, per guisa che il mercurio scese ad occupare anche l'estremità del tubo *b'* e il tratto appartenente alla saldatura, e qualche divisione del tubo M.

Da ultimo si fece il riempimento del manometro con aria ben secca; si chiuse con un colpo di fiamma la punta del tubo M", e si continuò la fusione del vetro fino all'ultima divisione alla quale era giunta la calibrazione del tubo stesso.

Siccome era necessario conoscere la temperatura dell'aria dentro il manometro, esso fu circondato con una canna di vetro del diametro di due centimetri, e piena d'acqua, la quale era contenuta alla sua volta in un'altra canna del diametro di tre centimetri. Nell'acqua era immerso un agitatore, ed era sospeso un termometro, che arrivava col suo bulbo a metà circa della canna.

Le letture sui tubi del manometro e sul termometro si facevano mediante un cannocchiale, il cui sostegno era collocato sulla stessa mensola che portava il catetometro per le letture sulla campanella.

Per difendere infine il manometro dal calore che potevano mandargli i due apparati riscaldanti, venne separato da essi mediante parecchi schermi di latta e cartone.

Per fare la misura della pressione con questo manometro, osservai dapprima il volume occupato dall'aria dentro i tubi fino alla divisione sopra considerata del tubo M", mentre la punta di questo medesimo tubo era ancora aperta ed in comunicazione coi vasi essiccanti; osservai nello stesso tempo la temperatura di un termometro, il cui bulbo era legato verso il mezzo del tubo M' e la pressione atmosferica.

Allora chiamando v, t e p rispettivamente il volume, la temperatura e la pressione spettanti a questa osservazione; quando poi il tubo M" fosse chiuso, e l'aria si fosse ridotta ad un volume v' sotto una pressione p', essendo t' la sua temperatura, si avrebbe avuto la relazione

$$\text{(1)} \qquad \frac{p\,v}{1+at} = \frac{p'v'}{1+at'},$$

ammettendo la legge di Boyle come esatta. Essendo essa imperfetta, ho arrecato al prodotto $p'\,v'$ direttamente risultante dai dati delle mie esperienze, le correzioni che si deducono dalle tavole pubblicate da Amagat [1]). Sopra un asse di coordinate

1) *Ann. de Chimie et de Physique*, Sér. 5, Vol. XIX, p. 345, 1880; o *Comptes-rendus* del 1884, 2, pag. 1017.

cartesiane ho portato i valori delle pressioni adoperate da Amagat. a partire da 760 mm., e sull'altro asse i rapporti fra i prodotti $p' v'$ spettanti alle rispettive pressioni, e il prodotto $p'' v''$ che alla medesima temperatura spetta alla pressione di 760 mm. Fino alla pressione di 65 atmosfere ho adoperato i valori riferiti nei *Comptes-rendus*, e da 65 atmosfere in poi, i valori riferiti negli *Annales de Chimie et de Physique*. Perciò se dalla curva che con tali dati ho costruita si ricava uguale ad r il rapporto $\frac{p' v'}{p'' v''}$ in prossimità della ascissa p' si avrà, come valore più approssimato della pressione esercitata sul vapore

$$p''' = \frac{1 + a t'}{1 + a t} \frac{p v}{v'} r - \theta, \tag{2}$$

essendo θ la tensione del vapore di mercurio alla temperatura a cui trovasi la campanella.

Mediante questa formola ho calcolato, con gli elementi ottenuti dalle letture fatte sul manometro, la pressione esercitata nel mio apparecchio.

Per valutare il volume v', ho sempre tenuto conto dell'espansione dei tubi del manometro per effetto della pressione; e presi come coefficiente di tale espansione *riferito ad un' atmosfera* il numero 0,000020, che è leggermente inferiore a quello da me determinato per la campanella adoperata nello studio del vapor d'etere rispetto alle leggi di Boyle e di Gay-Lussac. Per coefficiente di dilatazione termica ho preso il numero 0,0000218.

Una causa di errore, per computare la quale non si hanno dati sufficienti, si è che ad alte pressioni il coefficiente a di dilatazione dei gas non è conosciuto; quindi, nel caso ad esempio che fra le due temperature t e t' fossevi una differenza di più gradi, sarebbe molto incerto il calcolo di p' fatto con la formola (2). È per questo che io ho circondato il manometro con un bagno d'acqua, ed ho difeso poi il bagno con un involucro d'aria. In tal modo, ora versando nel bagno un po' d'acqua calda, ora qualche po' d'acqua fredda o qualche pezzetto di ghiaccio, e mantenendolo agitato, sono riuscito, col favore anche della stagione in Cagliari in quest'anno, a mantenere la tempe-

ratura del manometro intorno a 16° (che era pure la temperatura delle esperienze di Amagat), per guisa che fra le temperature più grandi e più piccole osservate, non correva una differenza più grande di 1°. Così io spero di avere in gran parte evitata la suddetta causa di errore, tanto da non recare alterazione apprezzabile in p' rispetto alle pressioni che si misuravano.

Il manometro aveva a tutte le pressioni una sensibilità adatta alle ricerche che si dovevano eseguire.

6.° *Procedimento delle esperienze.* — Cominciavo dall'accendere la lampada sotto al recipiente V'', facendo così precedere nella campanella la compressione alla dilatazione del vapore. Producevo poscia l'ebollizione del liquido contenuto nella stufa che doveva dare la temperatura al vapore, facendo anche bollire l'acqua nel vaso in cui era contenuta la seconda saldatura della coppia termoelettrica.

Così seguivo continuamente l'andamento del manometro, e quello del galvanometro che era nel circuito della coppia. Quando la pressione aveva raggiunto il valore che si voleva, si curava di regolare la distanza della fiamma sotto al recipiente V'' in modo che la pressione non aumentasse più e rimanesse poi costante; indi si aspettava che l'ago del galvanometro fosse già fermo da tanto tempo, da esser certi che il vapore nella campanella avesse raggiunta la temperatura dell'ambiente in cui si trovava. Allora si facevano tutte le letture.

Se si fosse veduto o anche si fosse dubitato che durante l'esperienza, o la colonna di mercurio nel manometro o l'immagine luminosa sulla scala del galvanometro si fossero mossi, si ripeteva la determinazione una o più volte, secondo il caso.

Accertatomi così dell'esattezza della prima determinazione, lasciando sempre costante la temperatura nella stufa, avvicinavo la fiamma al recipiente V'' di una quantità, indicatami dalla pratica, e tale da portare la pressione all'incirca al valore che desideravo; e facevo una seconda determinazione. E così di seguito fino alla condensazione del vapore. Quando ad alte pressioni era necessario un riscaldamento molto forte del recipiente V'', aumentavo anche la grandezza della fiamma, mantenendola poi sempre ad una certa distanza dalla condensazione.

Il volume occupato dal vapore nella campanella lo determinavo nell' istessa guisa.

Purificazione del solfuro di carbonio. — Per la purificazione del solfuro di carbonio si adoperò in massima il metodo di agitarlo due o tre volte con cloruro di mercurio ben polverizzato, filtrandolo e distillandolo quindi a bagno maria, dopo d' avervi aggiunto il 2 per cento di puro olio d' oliva. Però tutte le cautele adoperate per avere la sostanza purissima, sono descritte nella Memoria di prossima pubblicazione che contiene lo studio del solfuro di carbonio rispetto alle leggi di Boyle e di Gay-Lussac; essendochè in quelle esperienze, come in queste, ho adoperato lo stesso campione di liquido; avendo avuto però la cura di filtrarlo e distillarlo nuovamente, subito prima di usarlo in queste ultime.

7.° *Risultati delle esperienze.* — Coi risultati delle osservazioni ho descritto le isotermiche che trovansi nella tavola annessa. Per quelle spettanti alle prime quattro temperature: 217°,4, 262°,8 271°,6 272°,1 l' origine dei volumi è 0^{cc} e quella delle pressioni è 16,000 mm. di mercurio; nel mentre che ogni millimetro nelle ascisse rappresenta $^1/_{10}$ di cent. cub. e ogni millimetro nelle ordinate rappresenta la pressione di 400 millimetri.

Per due isotermiche a 272°,6 e a 272°,9 l' origine dei volumi è 1^{cc} e quella delle pressioni è 50.000 millimetri di mercurio; e 1^{mm}, sulle ascisse rappresenta $^1/_{50}$ di cent. cub., e sulle ordinate la pressione di 100 millimetri.

Finalmente per il terzo gruppo di isotermiche (da 272°,9 in su) l' origine dei volumi è 1^{cc} e quella delle pressioni è 54.000 millimetri di mercurio; e 1^{mm} sulle ascisse rappresenta $^1/_{100}$ di cent. cub., e sulle ordinate la pressione di 25 millim.

Nel disegno annesso tutte le isotermiche del solfuro di carbonio sono state trasportate di un mezzo centimetro verso destra e di un mezzo centimetro verso l' alto.

Dall' esame delle isotermiche stesse risulta che

La temperatura critica è uguale a 273°,05 C.,
la pressione » » $55,380^{mm}$ = 72,868 atm., e
il volume critico » 2^{cc},651 per un gramma di sost.

(Continua).

RIVISTA

Sunti di A. BARTORELLI.

Comptes rendus — *Secondo Semestre 1891.*

1. 2. — MASSIN. *Sopra alcune misure di capacità, di self-induzione e di induzione mutua effettuate sopra linee aeree.* — Scarsissime o nulle essendo le misure fatte sulla capacità, sulla self-induzione e sull' induzione mutua delle linee telegrafiche aeree, specialmente per la difficoltà di trovare delle linee che sodisfino alle condizioni necessarie per potere effettuare tali misure, l' A. pubblica i resultati di quelle che ha potuto fare sopra tre differenti circuiti. Questi circuiti erano:

A. Linea di 18^{km}, in filo di ferro di 3^{mm}; due fili posti a $0^{m},40$ l' uno dall' altro e a $4^{m},50$ dal suolo in media.

B. Linea di 50^{km}, nelle stesse condizioni della precedente.

C. Linea di 50^{km}, in filo di rame di $2^{mm},5$; due fili posti a $0^{m},50$ l' uno dall' altro e a 5,50 dal suolo in media.

La misura della capacità ha dato resultati abbastanza prossimi a quelli che si ottengono dal calcolo per i due primi circuiti. La misura della self-induzione ha dato un resultato molto vicino a quello che dà il calcolo per il terzo circuito (in rame); per i primi due non si potevano fare confronti perchè entra in giuoco la permeabilità del ferro che non era conosciuta. Infine quanto alla induzione mutua dei due fili di ogni circuito l' A. non ha trovato valori troppo concordanti.

3. — D. HURMUZESCU. *Vibrazione di un filo percorso da una corrente continua.* — L' A. ha trovato che un filo metallico fine, teso fra due supporti, quando è traversato da una corrente continua si pone in vibrazione.

L' ampiezza delle vibrazioni, dapprima molto piccola, cresce col tempo e arriva rapidamente ad un valore massimo che conserva fintanto che passa la corrente, purchè il mezzo ambiente resti nelle medesime condizioni, o almeno non cambi bruscamente. Le vibrazioni cessano poi in pochi secondi quando si interrompe la corrente.

Dalle esperienze dell' A. risulterebbe che per una tensione determinata del filo l' amplitudine delle vibrazioni dipenderebbe dalla differenza di temperatura fra il filo e il mezzo ambiente, e quindi anche dall' intensità. L' A. spera di pubblicare fra breve

la legge del fenomeno dal punto di vista della tensione del filo, della differenza di temperatura fra il filo e il mezzo ambiente, e del modo con cui avviene lo scambio di calore fra le due sorgenti.

LABATUT. *L' assorbimento e la fotografia dei colori.* — In questi ultimi anni si è cercato di determinare l' impressione delle lastre fotografiche per le radiazioni visibili, colorandole; e ciò nella speranza di ottenere dei massimi di impressione per le righe d' assorbimento delle soluzioni impiegate. Questa teoria non è stata sempre verificata esattamente; questi massimi di impressione sono generalmente più avanzati verso il rosso che non le righe di assorbimento delle soluzioni. Ma l' assorbimento di una pellicola tinta può essere differente da quello della soluzione che ha servito a tingerla. L' assorbimento delle *pellicole trasparenti colorate* è un fatto che si può ottenere sperimentalmente, e, se si impiegano le stesse pellicole per ricevere l' impressione fotografica, si potranno paragonare i due fenomeni.

L' A. ha fatto delle esperienze secondo il metodo scoperto dal Lippmann, adoprando però delle pellicole tinte con materie coloranti a righe d' assorbimento nettissime, ed ha ottenuto così sulle pellicole delle righe colorate. L' impressione fotografica avviene per le radiazioni assorbite. Da questa relazione fra l' assorbimento e l' impressione fotografica resulta che se, col metodo di Lippman, si vuole ottenere l' impressione di una radiazione determinata, basta scegliere una lastra sensibile colorata che assorba questa radiazione, sopprimendo ogni schermo colorato anteriore alla lastra.

L' A. osserva poi che si vedono le radiazioni assorbite sulla faccia della pellicola che, durante la posa, è stata in contatto con lo specchio di mercurio; ma, girando la lastra, e guardando per riflessione sulla faccia vetro, si vedono ancora dei colori brillanti come quelli dell' altra faccia, ma loro complementari. Egli dà di questa doppia colorazione una spiegazione fondata sopra la teoria elementare degli anelli colorati. Infine mostra come per la corrispondenza che passa fra l' assorbimento e la riduzione fotografica non sia necessario l' uso dello spettroscopio per ottenere da lamine sottili delle lastre a colori.

4. — A. LEDUC. *Sulla densità dell' ossigeno, dell' idrogeno e dell' azoto.* — L' A. col metodo di Regnault, al quale ha apportato alcuni perfezionamenti, ha misurato la densità dell' ossigeno, dell' idrogeno e dell' azoto rapporto all' aria, a meno di $^1/_{10000}$, e ha trovato i seguenti valori:

Per l' ossigeno	1,1050
» l' idrogeno	0,0695
» l' azoto	0,9720

Potendosi dalle densità dell' ossigeno e dell' azoto dedurre la composizione dell' aria atmosferica [1]), l' A. prende la media dei resultati ottenuti, cioè le cifre 1,10506 e 0,97203, e trova con queste che la proporzione centesimale dell' ossigeno nell' aria è 23,235 in peso e 21,026 in volume. Il peso atomico dell' azoto risulterebbe uguale a 13,99, cioè vicino per quanto è possibile a quello ammesso dai chimici: ma per l' ossigeno il peso atomico risulterebbe 25,905 che differisce troppo dal numero 16, ammesso come peso atomico, tanto che l' A. crede si debba tornare a studiare la composizione dell' acqua.

5. — E. Schéring. *Sugli inclinometri a induzione.* — L'A. ricorda una Nota, pubblicata da Wild nei *Comptes rendus* del 4 Maggio 1891, nella quale si dà notizia di un inclinometro a induzione costruito dal Wild medesimo, e delle esperienze con esso fatte. In questo apparecchio ad una variazione di 13'',0 dell' inclinazione corrisponde uno spostamento di $0^{mm},1$ dell' immagine sulla scala divisa, e l' A. fa osservare che egli, insieme a suo fratello Carlo Schéring, aveva già costruito nel 1878 nell' osservatorio magnetico di Gottinga un inclinometro ad induzione più sensibile di quello del Wild, perchè dava uno spostamento di $0^{mm},1$ dell' immagine sulla scala divisa per una variazione dell' inclinazione magnetica non superiore a 4'',2. Questo apparecchio si trova descritto da Carlo Schéring a pag. 42 del Rapport du Congrés des Naturalistes á Cassel, pubblicato il 13 settembre 1878. Nel marzo 1886 poi l' A., in compagnia sempre del fratello, ha costruito un altro inclinometro più sensibile, nel quale lo spostamento di $0^{mm},1$ corrisponde ad una variazione dell' inclinazione di 1'',2.

A. Leduc. *Sulla dilatazione del fosforo e sul suo cambiamento di volume al punto di fusione.* — L' A. osservando che, mentre è dimostrato come i corpi cangino di volume durante la fusione, non è con pari certezza stabilito se il cambiamento di volume è assolutamente brusco, o se al contrario avviene in un intervallo di temperatura più o meno esteso, si è proposto di studiare questo secondo punto, limitando in questa Nota lo studio al fosforo. Con una disposizione che permetteva di avere in ogni istante la temperatura del fosforo a meno di $^1/_{10}$ di grado l' A.

1) *Comptes rendus* 4 agosto 1890.

ha trovato che esso si dilata *quasi regolarmente* fino al punto di fusione che è a 44°,1 del termometro normale; a partire da questo momento senza che la temperatura cangi di una quantità apprezzabile il volume del fosforo cresce notevolmente. L' A. ha poi seguito le variazioni di volume all' aumentare della temperatura fino a 50°, e dopo al discendere della temperatura fino a 26°, punto in cui il fosforo si è solidificato. Risulta dunque, secondo l' A., che la variazione di volume col cambiamento di stato è *assolutamente brusca*, e di più che il rapporto dei volumi del fosforo allo stato liquido e allo stato solido al punto di fusione è 1,0345, numero concordante sensibilmente con quello di Kopp che è 1,0343.

Quanto poi alle variazioni di volume del fosforo, allo stato liquido o allo stato solido, col cambiare della temperatura, l' A. non ha potuto rappresentarle se non con formole a tre termini, di cui però non può ancora precisare i coefficienti.

6-8. — CH. ANTOINE. *Sulla tensione del vapor d' acqua fino a 200 atmosfere.* — Regnault ha dato le tensioni del vapor d'acqua fino a 230°; Cailletet e Colardeau hanno determinato queste tensioni fino a 365°, punto critico del vapor d' acqua. Esprimendo le tensioni P in atmosfere si avrebbe, secondo le esperienze di Regnault [1])

$$t = \frac{1638}{5{,}0402 - \log P} - 225 \tag{1}$$

e secondo le esperienze di Cailletet e Colardeau

$$t = \frac{1638 - 0{,}0005\, P^2}{5{,}0402 - \log P} - 225 \tag{2}$$

Secondo l' A. il modo più semplice di determinare, per mezzo della formola (2), le pressioni in funzione di temperature date è di calcolare dei valori approssimati P' delle tensioni in funzione di t e di dedurne il valore di 0,0005 P'^2. In questa Nota l' A. calcola le tensioni P' secondo le funzioni esponenziali, che hanno servito per lungo tempo a rappresentarle praticamente, e paragona i resultati a cui giunge calcolando con questo metodo le tensioni per delle temperature date, con quelli a cui si arriva calcolando colla formola (2) le temperature per delle tensioni date. Ottiene in questa guisa una indicazione sul grado di approssimazione dato dai suoi calcoli.

1) *Annales de Chimie et de Physique.* Febbraio 1891.

9-13. — A. Perot. *Verificazione della legge di deviazione delle superfici equipotenziali, e misura della costante dielettrica.* — È noto che, ammettendo la legge di deviazione delle superfici equipotenziali (rifrazione), se k_1 e k_2 indicano le costanti dielettriche dei due mezzi la relazione che lega gli angoli α e β, che fa la superficie di separazione dei due mezzi con due superfici equipotenziali giacenti in essi, è

$$\frac{\tang \alpha}{\tang \beta} = \frac{k_1}{k_2} .$$

Nel caso poi in cui il secondo mezzo è l' aria la relazione può scriversi

$$\tang \alpha = k \tang \beta ,$$

k essendo la costante dielettrica del primo mezzo.

L' A. con metodo ingegnoso, che sarebbe però difficile riassumere in poche parole, ha verificato sperimentalmente questa legge.

Aymonnet. *Relazione fra l' indice di rifrazione di un corpo, la sua densità, il suo peso molecolare e il suo potere diatermano.* — Studiando gli spettri calorifici del flint, del salgemma, del flint e cloroformio, del flint e cloroformio iodato, con una lampada Bourbouze l' A. ha riconosciuto: 1° che ciascuno di essi presentava una serie di massimi periodici, le cui lunghezze d' onda erano i multipli di uno stesso numero dipendente dalla natura del corpo; 2° che questi massimi si spostavano, conservando sempre le loro distanze reciproche, quando si faceva variare la temperatura della sorgente. Questi resultati lo hanno condotto a rassomigliare i corpi traversati da un fascio calorifico a dei corpi percorsi da una radiazione sonora; ed a studiare la trasmissibilità del calore attraverso a differenti liquidi presi sotto spessori variabili. L' A. riporta in questa Nota il resultato degli studi fatti sopra cinque corpi, facili ad ottenersi puri ed aventi peso molecolare, densità ed indice di rifrazione differentissimi; essi sono: l' acqua, l' alcool, la benzina, il cloroformio e il solfuro di carbonio. Sono stati presi sotto spessori varianti fra $0^{mm},5$ e 45^{mm}; ogni curva della variazione di trasmissibilità con lo spessore è stata determinata con 10 punti almeno; lo spettro calorifico di ciaschedun liquido era stato in precedenza rilevato con un sistema rifrangente di flint, in modo da permettere la determinazione della lunghezza d' onda corrispondente al suo centro di gravità. Gli indici di rifrazione calorifica dei corpi studiati sono stati determinati dall' A. con la riflessione.

Per il rapporto y della diatermaneità del recipiente col liquido da esaminare, alla diatermaneità del recipiente vuoto l' A. ha trovato, sotto certe ipotesi la legge $y = Aa^{\alpha x}$, dove x indica lo spessore del liquido in mm. e le A, a, α sono costanti. Per i cinque corpi studiati esso ha ottenuto i numeri seguenti:

CORPI	A	a^{α}	n ottenuto per riflessione	λ del centro di gravità	ρ
Acqua	0,109	0,9801	1,318	1,02	0,9808
Alcool	0,193	0,9818	1,35	1,12	0,9848
Benzina.	0,443	0,9830	1,44	1,22	0,9950
Cloroformio . . .	0,679	0,9910	1,40	1,30	0,9894
Solfuro di Carbonio	0,976	0,9930	1,55	1,42	1,0074

In questa tabella n è l' indice di rifrazione, λ la lunghezza d' onda in *micron*, e ρ un coefficiente di correzione per il quale bisogna moltiplicare A, per tener conto delle riflessioni.

Al seguito poi di altre ipotesi particolari, per le quali rimandiamo alla Nota originale, l' A. giunge infine a stabilire la relazione

$$A\rho = \frac{1}{2} C e^{\frac{1}{3}} d^{\frac{2}{3}} (n-1)^2 \lambda$$

dove C è una costante, ed e e d sono il peso molecolare e la densità del liquido. Ponendo in questa formola per n il valore trovato per l' acqua 1,318, e i valori noti della sua densità e del suo peso molecolare, ne ha dedotto il valore di C, e con questo valore ha calcolato la tabella seguente

Liquidi	Densità a 20°,5	Formule	Peso molec. adottato	n calcolato
Acqua	0,998	HO	9	1,318
Alcool	0,792	$C^4H^6O^2$	46	1,33
Benzina.	0,875	$C^{16}H^6$	78	1,43
Cloroformio . . .	1,488	C^2HCl^3	119,5	1,40
Solfuro di Carbonio	1,262	CS^2	38	1,59

da cui si vede che i valori di n calcolati concordano sensibilmente con quelli della prima tabella.

14. — L. DE LA RIVE. — *Sul valore della tensione elettrostatica nel dielettrico.* — L' A. osserva che si definisce in generale il flusso d' induzione come il prodotto della forza elettromotrice per l' elemento di superficie, ma limitandosi alla sola ipotesi

di un fluido incompressibile che emani da un centro o da un numero qualunque di centri, le proprietà del potenziale sussistono senza fare intervenire una azione a distanza. Partendo da questa ipotesi, accennata anche dal Maxwell in una delle sue memorie, l' A. dimostra che « *il valore della tensione nel dielettrico si ottiene calcolando la quantità di movimento del fluido elettrico supposto incompressibile* ».

15. — E.-H. Amagat. *Nuova rete d' isoterme dell' acido carbonico.* — L' A. pubblica in questa Nota due tabelle e due figure sulle isoterme dell' acido carbonico, riserbandosi di dar comunicazione in altra Memoria dei particolari dello studio da lui fatto. L' antica rete d' isoterme, con la quale il Sarrau ha determinato le costanti dell' acido carbonico, dava soltanto le linee comprese fra le temperature di 35° e 100°; quella ora pubblicata dall' A. dà le linee di 10° in 10° comprese fra 0° e 100°; dà inoltre quelle corrispondenti a 32°, 33°, 137°, 198° e 258°. La pressione è stata spinta fino a 1000 atm.; il metodo impiegato dall' A. è quello già da lui applicato ai gas: aria, ossigeno, idrogeno e azoto, e descritto in una sua Comunicazione dell' 8 decembre 1890.

La liquefazione dell' acido carbonico è avvenuta:

Alle temperature di	0°	10°	20°	30°
Sotto le pressioni di	$34^{atm},4$	$44^{atm},4$	$56^{atm},4$	$70^{atm},7$.

H. Gilbault. *Variazione della forza elettromotrice delle pile con la pressione.* — Partendo dai concetti espressi dall' Helmholtz nella sua teoria dell' energia libera si arriva a la formola

$$q \frac{dE}{dp} = dv$$

nella quale E rappresenta la forza elettromotrice di un elemento, q la quantità di elettricità che si sviluppa quando, per effetto della reazione chimica, si produce una variazione del volume v, infine p indica la pressione. L' A. misurando la variazione della forza elettromotrice di diversi sistemi di pile al variare della pressione ha trovata verificata la legge suddetta fino a 100 atm. Esso ritiene che sotto pressioni molto elevate entrino in giuoco dei fatti secondari che mascherino il fenomeno principale, e da ciò proverrebbe il disaccordo che si ha con le alte pressioni.

D. Tommasi. *Accumulatore elettrico multitubulare.* — In questo accumulatore ogni elettrodo è formato da un tubo perforato in piombo, ebonite, porcellana o celluloide, col fondo chiuso da una lastra in ebonite al centro della quale si fissa un' asticella

di piombo che serve di conduttore. L' intervallo compreso fra l' asticella centrale e la parete del tubo-elettrodo è riempito con ossido di piombo; dei contatti metallici riuniscono insieme rispettivamente le asticelle dei tubi positivi e quelle dei tubi negativi. La forma dell' elettrodo tubulare poi può essere circolare, quadrata o rettangolare, variando di conseguenza anche la forma dell' asta centrale.

I principali vantaggi di questo accumulatore sono:

1° La corrente passa interamente attraverso alla materia attiva, dalla superficie del tubo all' asta centrale o viceversa.

2° La quantità di materia attiva e insieme quindi la capacità è portata al massimo; da ciò deriva diminuzione di peso e di volume.

3° Nella formazione o nella carica si può raggiungere una intensità di 60 Ampères per chilogrammo di elettrodo.

4° Per l' assenza di saldature delle aste o lamine che servono di conduttori non sono a temersi le rotture che si verificano nei sistemi a lastre.

Il tipo a tubo di piombo contiene 67 per cento di materia attiva ed ha le costanti elettriche seguenti:

Forza elettromotrice	2,4 volts
Capacità per chilogrammo di elettrodo	16 amp-ora
Rendimento in quantità . . .	95 per 100
Rendimento in lavoro . . .	80 per 100.

La rivista del secondo semestre del 1891 dei *Comptes rendus* continuerà nel prossimo fascicolo del *Nuovo Cimento*. Intanto fino da questo fascicolo si comincia la rivista del 1892.

Primo semestre 1892.

1. — H. Poincaré. *Sopra un modo anormale di propagazione delle onde.* — L' A. esamina una soluzione particolare delle equazioni del movimento ondulatorio, la quale presenta un certo numero di particolarità notevoli. Sebbene egli non veda per il momento una applicazione fisica dei resultati cui giunge, perchè le singolarità riscontrate non si produrranno mai nella propagazione delle vibrazioni luminose, a causa della piccolezza della lunghezza d' onda; pure crede di dover pubblicare questi resultati perchè è possibile che fatti analoghi a quelli citati da lui accadono nel caso delle ondulazioni hertziane.

GOUY. *Sui fenomeni elettrocapillari e le differenze di potenziale al contatto.* — L' A., in vista della questione sempre controversa delle differenze di potenziale al contatto dei metalli, si è proposto di misurare la tensione superficiale delle amalgame liquide più o meno polarizzate, paragonandola con quella del mercurio.

Dapprima l' A. ha operato col mercurio. L' apparecchio usato è un elettrometro capillare, costruito con un grosso tubo graduato in millimetri; un tubo laterale e un serbatoio mobile permettono di far variare il livello del mercurio, in modo che una sola lettura dà la altezza della colonna equilibrata dalle forze capillari. Il vaso inferiore, disposto come d' ordinario e contenente del mercurio e dell' acqua acidulata, comunica per mezzo di un sifone con un altro vaso contenente pure dell' acqua acidulata e del mercurio M. La colonna mercuriale e il mercurio M sono messi in comunicazione, per mezzo di fili di platino, con un elettrometro a quadranti che dà la loro differenza di potenziale δ. Si misura la altezza che corrisponde ai diversi valori di δ, conducendo il menisco ad una piccola distanza conosciuta dall' estremità della punta affilata.

Ciò fatto, l' apparecchio è smontato, il mercurio tolto e sostituito con amalgama liquida, eccetto il mercurio M che resta invariabile. L' elettrometro a quadranti è messo in comunicazione, come precedentemente, col mercurio M e con la colonna metallica, e indica la loro *differenza apparente di potenziale* δ. Si misura la altezza di questa colonna che corrisponde ai diversi valori di δ, conducendo il menisco allo stesso punto che precedentemente.

L' A. ha fatto le prime esperienze sulle amalgame ad $^1/_{1000}$ di zinco, cadmio, piombo, stagno, bismuto, argento e oro, ed ha costatato che *per un medesimo valore di* δ *le altezze di mercurio e di amalgama sono sensibilmente le stesse.* In conseguenza della uguaglianza quasi assoluta dei pesi specifici e quindi della tensione superficiale, l' A. enuncia questa legge molto approssimata « *In un sistema formato da mercurio non polarizzato, da acqua acidulata e da un' amalgama a* $^1/_{1000}$ *più o meno polarizzata, la tensione superficiale dell' amalgama è funzione della differenza apparente di potenziale* δ *fra l' amalgama e il mercurio, e questa funzione resta la stessa se si sostituisce all' amalgama del mercurio* ».

Così il medesimo valore δ_0 della differenza di potenziale apparente corrisponde al massimo di tensione superficiale per il mercurio e per le amalgame a $^1/_{1000}$. Ne resulta una importante conseguenza, se si ammette con Helmholtz e con molti fisici che,

a questo massimo di tensione, la differenza di potenziale fra il metallo e l'acqua acidulata L sia nulla. Si ha infatti

$$\delta_0 = \mathrm{Pt} \,|\, \mathrm{Hg} + \mathrm{Hg} \,|\, \mathrm{L} + \mathrm{amalg.} \,|\, \mathrm{Pt} = \mathrm{Pt} \,|\, \mathrm{Hg} + \mathrm{Hg} \,|\, \mathrm{L} + \mathrm{Hg} \,|\, \mathrm{Pt},$$

da cui

$$\mathrm{Hg} \,|\, \mathrm{amalg.} = 0\,.$$

Cioè « *La differenza di potenziale al contatto fra il mercurio e le amalgame a* $^1/_{1000}$ *è nulla o piccolissima* se si ammette la teoria di Helmholtz.

L' A. mostra infine che questi fatti non sono poi in vera contradizione con le importanti esperienze di Pellat [1]).

2. — V. CHABAUD. *Sopra un nuovo modello di termometro a rovesciamento per misurare le temperature del mare a diverse profondità.* — Negli ordinari termometri impiegati per misurare le temperature del mare alle varie profondità si presentano due inconvenienti, conseguenza uno dell' altro. Quando si fa risalire il termometro, il mercurio del serbatoio gravita sullo strozzamento destinato a trattenerlo e non passa molto tempo che il tubo in quel punto si screpola, come si può riconoscere guardandolo contro la luce con una lente; in conseguenza di ciò lo strozzamento non è più atto a trattenere il mercurio ed un urto può bastare a farne passare qualche goccia, alterando così le indicazioni della colonna termometrica.

L'A. presenta un nuovo modello di termometro dove, per ovviare a questi inconvenienti, il tubo termometrico è ripiegato ad U in prossimità dell' estremo in cui è saldato al serbatoio, e questo è situato di fianco e parallelamente al tubo termometrico stesso. Di più allo strozzamento è sostituito un otturamento parziale del tubo, nel punto dove si salda col serbatoio, per mezzo di un' asticella di vetro saldata al fondo del serbatoio e che lo traversa in tutta la sua lunghezza, andando a terminare in punta affilata all' altro estremo.

H. GILBAULT. *Nuovo igrometro a condensazione.* — L' A. fa rimarcare che, mentre per determinare l' umidità assoluta o l'umidità relativa con un igrometro a condensazione bisogna osservare il momento di apparizione della rugiada e la temperatura della superficie sulla quale essa si deposita, in generale i fisici si sono fin qui occupati di perfezionare i processi d' osservazione relativi al primo punto, trascurando gli altri. Infatti negli igrometri impiegati si prende per temperatura della superficie di condensa-

1) *Journal de Physique* 1887 e 1890.

zione quella indicata da un termometro che pesca nel liquido refrigerante, il quale ha una debolissima conducibilità termica.

L' A. ha fatto delle esperienze adoprando, come superficie di condensazione, una lamina di vetro platinata, che formava la parte anteriore di un apparecchio analogo a quello di Alluard. Con esperienze preliminari l' A. aveva determinato la legge di variazione della resistenza elettrica del platino con la temperatura, dimodochè poteva con una semplice misura di resistenza determinare a meno di $^1/_{30}$ di grado la temperatura della superficie metallica sottilissima sulla quale si produceva la condensazione.

L' apparecchio era collocato in un vaso di vetro e questo era attraversato dall' aria la cui umidità si trattava di determinare.

E. Branly. *Dispersione delle due elettricità per mezzo dei raggi molto refrangibili.* — L' A. ricorda di aver già dimostrato (*Comptes rendus*, 8 Aprile 1890) che la dispersione dell' elettricità positiva di un piatto metallico illuminato con raggi molto refrangibili può divenire quasi uguale alla dispersione dell' elettricità negativa; e di avere ottenuto allora la dispersione delle due elettricità con una sorgente di luce di debolissima intensità, ma molto ricca di raggi ultra-violetti; era la scarica di una bottiglia di Leida posta in comunicazione coi poli di un rocchetto di Ruhmkorff a interruttore rapido. Ora l' A. si era proposto di far vedere che anche con l' arco voltaico la dispersione positiva non è trascurabile di fronte alla negativa. L' apparecchio usato dall' A. comprende un disco metallico illuminato, di 7 cm. di diametro, montato sopra un elettroscopio. L' elettroscopio è formato da una gabbia cubica in ottone, nel centro della cui faccia superiore è praticato un foro circolare sul quale è collocato un tubo verticale. In questo tubo è stato colato un cilindro di zolfo che circonda un' asta metallica terminata da due foglie d' oro; l'estremità superiore dell' asta porta il disco metallico. Questo disco, disposto verticalmente, è illuminato direttamente dalla sorgente attiva quando essa è l' arco voltaico; quando invece la sorgente è la scintilla il disco è contenuto in una scatola metallica interamente chiusa, collocata sul piatto superiore della gabbia dell'elettroscopio, e i raggi luminosi traversano allora una rete parallela al disco.

Si guarda una delle foglie d' oro con un microscopio a oculare micrometrico.

L' A. riporta i resultati di una serie di misure fatte con l' arco voltaico di un regolatore Serrin, i cui carboni (carboni Carrè ordinari) avevano 12 mm. di diametro, posto alla distanza di 40 cm. dal disco illuminato. I numeri che l' A. riporta esprimono in secondi i tempi di cadute delle foglie d' oro quando il

disco sotto l' azione della luce di un arco più o meno lungo, passava da un determinato potenziale ad un altro più basso. Le esperienze sono state estese a dischi di metalli differenti, la cui superficie era stata pulita di fresco o da qualche giorno, con illuminazione diretta oppure interponendo sul cammino dei raggi una lamina di quarzo di 1 mm. di spessore.

L' A. conclude che la dispersione positiva diminuisce più rapidamente che la negativa quando l' arco voltaico decresce; che, quando aumenta la distanza dell' arco dal disco, la durata della caduta cresce presso a poco nel medesimo rapporto per le due dispersioni; che infine l' assorbimento dei raggi attivi per mezzo del quarzo è debole, e che non è sensibilmente più forte nel caso della dispersione positiva.

L' A. paragona anche questi resultati con quelli già ottenuti con la scintilla; e termina mostrando come, contrariamenie all'opinione generalmente accettata, l' assorbimento dei raggi attivi non è completo nè con la mica, nè col vetro.

Bisogna rammentare che per assicurare l' isolamento dell'asta dell' elettroscopio l' A. aveva provato, oltre lo zolfo, anche la paraffina, la gomma-lacca e l' ebonite, ma aveva trovato migliore di tutti l' isolamento dello zolfo, tanto da asserire che durante le misure la perdita spontanea dell' elettroscopio era *rigorosamente nulla.*

SUNTI di A. STEFANINI.

Wied. Ann. d. Phys. und. Chem. XLII, 1891.

W. König. *Ricerche idrodinamiche e acustiche.* — L' A. applica le equazioni dell' idrodinamica allo studio delle figure di Kundt e delle attrazioni e repulsioni acustiche. Egli trova che i movimenti delle polveri nei ventri dei tubi sonori debbono ascriversi a forze diverse da quelle dovute al moto oscillante della massa d' aria; e non si può ammettere analogia fra le figure di Kundt e quelle che analogamente alle dune si formano in un liquido oscillante, e che furono studiate dal Darwin, perchè fra i due fenomeni vi sono essenziali differenze nei rapporti fra il peso specifico del fluido e dei granuli adoprati, e nelle durate di oscillazione. A motivo di ciò l' azione traslatoria del movimento del fluido è grandissima nel caso delle dune, piccolissimo in quello delle figure di Kundt.

L' A., applicando i resultati del Bjerknes, e servendosi del potenziale di velocità indicato dal Kirchhoff, trova che le figure

di Kundt si possono ritenere quali conseguenze delle azioni che si esercitano fra le particelle di polvere in seguito alle oscillazioni del liquido. Infatti due particelle di polvere che si trovino in un fluido oscillante si respingono se la retta dei loro centri è nella direzione del moto, e si attraggono se è ad essa normale. Perciò le particelle di polvere tendono a disporsi secondo superficie normali alla direzione delle vibrazioni, come di fatti avviene.

Sulla formazione di tali figure, e sulla disposizione delle particelle di polvere, ha influenza anche la rotazione che i moti vibratori del fluido imprimono alle particelle non sferiche che vi sono immerse, come l'A. mostra nell'ultima parte dei suoi studi, contenuta nel vol. 43 degli Annali.

H. HERTZ. *Sull' azioni meccaniche delle onde che si propagano nei fili.* — Poichè le azioni delle onde elettriche che si propagano nell'aria sono troppo deboli per esser determinate quantitativamente, fu studiata quella delle onde che si propagano nei fili metallici, servendosi della disposizione indicata dal Lecher. I fili paralleli che partivano dalle lastre del secondario avevano una lunghezza di m. 6,8 e le loro estremità furono unite fra loro. Il contatto mobile che forma il ponte era alla distanza di m. 1,2 dalle lastre anzi dette allorchè si era raggiunta la maggior risonanza fra le onde situate dalle due parti del ponte. Per misurare l'azione meccanica di queste onde l'A. si servì di un tubo di foglia d'oro lungo cm. 5,5 e del diametro di cm. 0,7 che era sospeso, col suo asse orizzontale, a un fil di bozzolo, e che manteneva una direzione fissa per mezzo di un leggerissimo magnete che vi era unito; un piccolo specchio permetteva di leggerne le deviazioni col cannocchiale. Tutto il sistema era contenuto in una cassettina di vetro.

Poichè il ponte A e l'estremità B riunite dei fili si devon considerar come nodi, così il ventre delle oscillazioni era situato nel punto di mezzo fra A e B; se si pone in quel punto l'apparecchio descritto, il tubo si dispone nella direzione della forza media, e si hanno delle deviazioni. Movendo il ponte si riconosce dalle deviazioni dell'apparecchio se il ponte stesso ha o no la posizione corrispondente a un nodo.

In un'altra esperienza il filo fu diviso in 12 parti uguali fra il nodo e il ventre, e l'apparecchio fu posto nel 13° punto di divisione. Le deviazioni diminuivano col crescere della distanza dal ventre. I valori ottenuti presentano un decorso assai regolare per poter riconoscere la forma della vibrazione, e per convincersi che essa è notevolmente diversa da un'oscillazione sinusoidale.

Per riconoscere la forza magnetica servì un anello circolare

fatto con filo d'alluminio, del diametro di 65 mm: il filo è grosso 2 mm., e il resto della disposizione è del tutto uguale a quella precedente. È probabile che questo anello lungo il diametro orizzontale si comporti come il cilindro. Ma se si presenta ad un nodo, non rimane in quiete come il cilindro, ma compie delle oscillazioni dello stesso ordine di quelle del cilindro. Di più la direzione della deviazione mostra che si ha che fare non con un' attrazione ma con una repulsione fra le parti vicine del filo e dell' anello.

Questi fenomeni sono evidentemente dovuti all' azione della vibrazione magnetica i cui nodi non coincidono con quelli delle vibrazioni elettriche, ma che, come l' oscillazione elettrica, si rende manifesta con una variazione nello stato dello spazio, e la cui direzione caratteristica è normale a quella della vibrazione elettrica. La forza magnetica rapidamente cangiante induce nell'anello chiuso una corrente che cambia collo stesso ritmo, e che fa deviare l' anello stesso.

Dall' aver la forza magnetica il suo valor massimo nei nodi della vibrazione elettrica, non ne consegue inversamente che essa si annulli completamente nei ventri di questa, come dovrebbe essere se la vibrazione fosse semplicemente sinusoidale.

Le azioni meccaniche delle forze elettriche e magnetiche sono in generale dello stesso ordine di grandezza; la prevalenza dell' una o dell' altra in ogni caso speciale, dipende dalle condizioni dello spazio.

E. Riecke. *Sull' elettrizzazione per strofinio.* — Riferendosi alle ricerche del Riess, l' A. ha determinato le cariche che prendono diversi corpi strofinati con lana o con seta. Egli ha trovato che il massimo della densità elettrica che può ottenersi collo strofinio è tanto minore, quanto più grande è la superficie dei corpi strofinati. Tutti i corpi che strofinati con lana o con seta si caricano negativamente, assumono colla lana cariche maggiori che colla seta. Il vetro invece si carica di più strofinato colla seta che colla lana. Se per le tensioni che assumono diverse sostanze strofinate, si avesse una legge analoga a quella di Volta, la differenza delle densità elettriche, che si producono strofinando un medesimo corpo prima con lana e poi con seta, dovrebbe corrispondere alla densità che si ottiene strofinando la lana con la seta; densità che, dalla media delle indicate differenze per 9 sostanze diverse, resulterebbe uguale a 0,23 in C. G. S. per una superficie di 5 cm^2.

Detto. *Il potenziale termico per le soluzioni diluite.* — In seguito alle ricerche del Planck (*Wied. Ann.* 32, 1887) l' A. calcola il potenziale per le componenti di una soluzione diluita. Egli ado-

pera anche i valori trovati per dedurne le leggi dell' abbassamento del punto di congelamento e quelle della solubilità, dell' evaporazione, della dissociazione nelle soluzioni diluite, della pressione osmotica e la legge Henry-Dalton; ma non è possibile un breve sunto dei calcoli a ciò relativi.

A. Oberbeck. *Sulla misura di forti correnti col galvanometro a specchio.* — Una corrente circolare di piccolo raggio fa deviare un piccolo ago magnetico, che si trovi nel suo centro o a piccola distanza, più intensamente di ciò che non faccia una corrente di raggio maggiore; mentre per distanze un po' grandi viene a predominare l' azione della corrente circolare di raggio maggiore. Si può dunque disporre due correnti circolari di raggio diverso in uno stesso piano verticale, in modo che le loro azioni sull' ago sieno uguali ed opposte; ed allora se i due circuiti son percorsi in senso contrario da una corrente qualunque, l' ago non devierà; ma un piccolo spostamento di uno dei due circuiti farà predominare l' azione del più grande o del più piccolo.

Partendo da questo principio l' A. indica un modo semplice di misurare anche forti correnti con i galvanometri a specchio; perchè spostando più o meno uno dei detti circuiti dalla posizione in cui vi è compensazione, si ha il modo di far aumentare da zero a un valore assai grande l' azione deviatrice sull' ago del galvanometro.

B. Walter. *Su un fenomeno caratteristico di assorbimento del diamante.* — L' A. ha osservato che molti diamanti privi di colore, ma in modo speciale quelli gialli, presentano una riga di assorbimento per $\lambda = 415,5$, che non appartiene al carbonio cristallizzato, ma a una sostanza estranea più abbondante nei diamanti gialli che in quelli senza colore, e che probabilmente è del samario.

Detto. *Sull' α monobromonaftalina.* — Questa sostanza ha un potere dispersivo grandissimo; ed è anche particolarmente trasparente per i raggi ultravioletti, tanto che l' A. ha potuto fotografare, attraverso un grosso strato di essa, lo spettro ultravioletto fino al di là della riga N.

C. Dieterici. *Ricerche calorimetriche.* — In questa terza parte delle sue ricerche l' A. determina la diminuzione della tensione massima del vapor acqueo a 0^0 prodotta da diversi sali che sieno sciolti in diverse proporzioni nell' acqua. Il metodo adoperato consiste nel riempire da prima un pallone assai grande di vetro, ove è stato fatto il vuoto, dei vapori che si svolgono da una soluzione salina tenuta alla temperatura di 0^0, e nel far poi comunicare tal pallone con un tubo contenente acqua distillata situata entro un

calorimetro a ghiaccio di Bunsen. Allora dall' acqua distillata si avrà un' evaporazione più o meno abbondante, fino a che la tensione del vapore in quel pallone non sia divenuta uguale a quella del vapore che si svolge a 0° dall' acqua distillata. Col metodo calorimetrico già indicato (*N. Cim.* 28, pag. 92) l' A. calcola la quantità di vapore che si è svolta dall' acqua distillata conoscendo il colore assorbito nell' evaporazione, e così misura direttamente l' abbassamento che il sale adoperato esercita sulla tensione del vapore. Contrariamente a ciò che egli si aspettava in seguito alla teoria di van 't Hoff, l' A. ha trovato così che la dipendenza dell' indicato abbassamento dalla concentrazione delle soluzioni è diversa per i diversi gas: per $NaNO_3$ tale abbassamento diminuisce al crescere della concentrazione; per NaCl, KCl, LiCl, KBr e KJ aumenta.

Queste esperienze, e anche quelle di Tammann fatte con metodo diverso e a diversa temperatura, mostrano che è costante il rapporto fra la tensione del vapore sopra l' acqua distillata e quella sopra una soluzione salina ad una data temperatura, come fu indicato da Babo. Ora, se questa legge è vera, dalla formula data da Kirchhoff e da Helmholtz per le calorie di soluzione di un sale, si dedurrebbe che per la temperatura di 0° quelle calorie sarebbero nulle, contrariamente a ciò che mostra l' esperienza. Questa contradizione era già stata notata da Arons (*N. Cim.* 19, pag. 173) che la ritenne dovuta all' uso della legge di Mariotte-Gay-Lussac. Ma l' A. avendo dimostrato che questa legge è valida a 0°, tale spiegazione non è sufficiente; ed egli stesso cerca di darne un' altra; ma si riserva di ritornare ulteriormente su questo punto. In ultimo l' A. fa osservare che i resultati da esso ottenuti per le soluzioni dei sali diversi da $NaNO_3$ sono in contradizione con la teoria della dissociazione proposta da Arrenius.

J. Elster e H. Geitel. *Nota su una nuova forma degli apparecchi per dimostrare la scarica elettrica provocata dalla luce diffusa.* — Gli A. descrivono una forma più solida di quella altra volta usata (*N. Cim.* 30, pag. 82) pei tubi con amalgama di sodio, e una pila di Zamboni, fatta con pezzi della solita carta dorata infilati su un' asta di ebanite, che serve meglio del modello ordinario per caricare gli elettrodi dei tubi medesimi.

P. Drude e W. Nernst. *Influenza della temperatura e dello stato di aggregazione sulle proprietà del bismuto in un campo magnetico.* — Scopo degli A. è stato di riconoscere l' effetto della temperatura sul fenomeno di Hall nel bismuto, e sull' aumento di resistenza che, secondo il Righi, subisce il bismuto in un campo magnetico.

Per studiare il fenomeno di Hall furono adoprate due lamine di bismuto, una quadrata e una circolare, dello spessore di cm. 0,5, contenute in una cassetta di vetro, con 4 fili di platino per reofori. Per riscaldare a diverse temperature quella lastra che si studiava, serviva un apparecchio assai semplice nel quale circolavano vapori di liquidi diversi.

Per la forza elettromotrice *e* del fenomeno di Hall, prendendo per unità quella alla temperatura iniziale, trovarono i resultati seguenti: per la lastra quadrata

t	20°	254°	23°
e . . .	1,000	0,418	1,005

e per quella tonda

t	14°	243°	100°	14°
e . . .	1,00	0,23	1,23	1,16

Quando il bismuto è liquido, la f. e. m. è da 60 a 100 volte più piccola che alla temperatura ordinaria; e nella successiva solidificazione il bismuto, come si deduce dai valori sopra indicati, non riacquista le proprietà primitive.

Per studiarne la resistenza elettrica, il bismuto era posto in un tubo capillare a pareti sottili; le comunicazioni colla pila e col galvanometro eran fatte per mezzo di fili di platino. Gli A. trovarono, per l'aumento Δw di resistenza in seguito alla magnetizzazione i valori seguenti:

t	16°	100	223	290	35	18
Δw	21,9	8,0	0,96	0,41	15,1	18,6 per %.

Fu studiato il fenomeno di Hall anche con una lamina di antimonio; l'influenza della temperatura fu per essa più piccola che pel bismuto. Col mercurio non fu osservato il fenomeno di Hall: diminuisce però del 2 per mille circa la sua resistenza quando è in un campo magnetico, ma forse per ragioni diverse che col bismuto.

In un'appendice poi il Drude fa notare che, d'accordo con quanto osservò già il Righi, non ha potuto costatare il fenomeno di Kerr con uno specchio di bismuto, contrariamente a quanto asserisce l'Hurion.

L. Arons e H. Rubens. *Sulla velocità di propagazione delle onde elettriche nei liquidi isolanti.* — È noto che i fili metallici servono soltanto a guidare le onde elettriche rapidissime, e che

la velocità della propagazione di quelle onde dipende soltanto dal mezzo ambiente. Di più è noto che dalle esperienze di Hertz resulta che se uno dei lati lunghi di un rettangolo è interrotto in un punto, e un punto dell' altro lato lungo è in comunicazione, per mezzo di un filo e di un corsoio metallico, con una delle lastre di un eccitatore herztiano, la differenza di potenziale alle due estremità dell' interruzione è costantemente nulla soltanto se i tempi impiegati dalle onde a percorrere le due parti del rettangolo sono uguali fra loro.

Gli A. si son serviti di questi principii per misurare la velocità di propagazione delle onde in liquidi diversi; perchè infatti se una certa lunghezza L_1 di uno dei lati corti di quel rettangolo si immerge in un liquido isolante, per mantener nulla la differenza di potenziale all' interruzione si dovrà spostare il corsoio metallico di una data lunghezza l; e allora il tempo impiegato dall'onda a percorrere nell'aria il doppio $2l$ di questa lunghezza è la differenza fra il tempo che l' onda impiega a percorrere la lunghezza L_1 successivamente nel liquido e nell' aria. Per aumentare la sensibilità dell' apparecchio, gli A. hanno adoprato due rettangoli sovrapposti ciascun dei quali è riunito ad una delle lastre di un eccitatore, le estremità delle interruzioni praticate nel lato opposto di ciascun rettangolo son riunite all' armature di piccoli condensatori; e l' uguaglianza del potenziale è constatata per mezzo di un bolometro di cui il Rubens si servì in altre esperienze.

Sia ora L la lunghezza di uno dei lati corti, e il contatto mobile sia di fronte allo zero di una graduazione, quando l' apparecchio è regolato per l' uguaglianza di potenziale alle estremità dell' interruzione. Si sostituisca quel lato con un filo di cui una parte L_g sia contenuta in una vaschetta, e sia L' la lunghezza del filo che resta al di fuori. Sia p_1 la divisione cui bisogna fermare il corsoio per regolar l' apparecchio quando la vaschetta è vuota, e p_2 quella corrispondente al caso in cui la vaschetta è piena di un liquido, il cui indice di refrazione per le onde che trasmette è n; si avrà

$$2p_1 = L_g + L' - L$$
$$2p_2 = n L_g + L' - L.$$

Sostituendo L_g con un' altra lunghezza L_s costituita da un filo piegato a zig-zag, si avrà analogamente

$$2p_3 = L_s + L' - L$$
$$2p_4 = n L_s + L' - L$$

e da queste 4 equazioni si otterrà

$$n = \frac{p_4 - p_3}{p_2 - p_1} .$$

I resultati ottenuti sono i seguenti:

	$\sqrt{\mu}$	Valori di n $\lambda = 6^m$	Valori di n $\lambda = 6^m.10^{-7}$ (riga D)
Olio di ricino	2,16	2,05	1,48
Olio d' oliva	1,75	1,71	1,47
Xilolo	1,53	1,50	1,49
Petrolio	1,44	1,40	1,45

Il valore del potere induttore specifico μ fu determinato dagli A. per ciascun liquido col metodo di Schiller.

Come si vede, queste esperienze sono una conferma della legge di Maxwell $n = \sqrt{\mu}$.

G. STERN. *Sulla misura microfonica dell'intensità del suono.* — L' A. descrive un microfono, che per la sua costruzione mantiene costante la resistenza ai contatti di carbone quando si adopri sempre allo stesso modo; e che colle correnti indotte nel circuito secondario del microfono, misurate con un elettrodinamometro del Bellati modificato in modo da non presentare variazioni dello zero per i cambiamenti della temperatura e del magnetismo residuo del nucleo, può servire a riconoscere se l' intensità di una vibrazione sonora si mantiene o no la stessa. Questo apparecchio non si presta tuttavia per misure assolute, e l' A. se n' è servito soltanto per costatare l' esistenza dei massimi e minimi nell' intensità di un suono emesso in una stanza, e che son dovuti alle riflessioni delle onde alla superficie delle pareti e dei solidi che si trovano nella stanza.

J. MOOSER. *Sugli strati metallici ottenuti colla polverizzazione del catodo.* — Per determinare la distribuzione della polvere metallica deposta su una lastra piana o su una superficie sferica di vetro da un metallo che forma il catodo di un tubo di scarica, l' A. ha misurato la resistenza elettrica di anelli concentrici separati sullo strato metallico e col centro comune nel punto ove lo spessore dello strato è massimo. Questa resistenza elettrica egli la deduce anche col calcolo dalle formule che dànno la distribuzione anzidetta partendo dal principio che le molecole che si staccano dal catodo si muovano secondo linee normali alle superficie

di livello; e confronta i resultati ottenuti sperimentalmente con quelli teorici. La concordanza non è sempre molto buona, in alcuni casi la divergenza raggiunge il 20 %; ma l' A. pensa che queste divergenze sieno dovute più che altro a errori inevitabili nelle misure dei raggi degli anelli sopra detti. Dalle misure fatte l' A. ha anche trovato che la resistenza specifica del platino così ottenuto è notevolmente maggiore di quella del platino ordinario, probabilmente a cagione dell' ossidazione che subiscono gli strati depositi elettricamente.

K. OLSZEWSKI. *Sullo spettro d' assorbimento e sul colore dell' ossigeno liquido.* — Avendo potuto ottenere una colonna di ossigeno liquido di circa 30 mm., l' A. oltre le 4 righe di assorbimento 628, 577, 535 e 480 ha potuto osservare, specialmente interponendo un vetro rosso fra la sorgente luminosa e la fenditura dello spettroscopio, anche una striscia di assorbimento corrispondente alla A di Fraunhofer, ma non riuscì ad osservare la riga B che sarebbe stata riconosciuta da Liveing e Dewar.

In piccola quantità l' ossigeno liquido apparisce privo di colore; ma per colonne al di sopra di 15 mm. presenta un colore bluastro ben deciso. E sarebbe infatti strano che un liquido che presenta un assorbimento così forte, fosse realmente senza colore.

L' A. fa anche osservare che il colore del cielo potrebbe esser dovuto all' ossigeno dell' atmosfera.

P. DRUDE. *Sulla refrazione della luce coi prismi metallici.* — L' A. ottiene per tal refrazione delle formule più semplici e più comode, pel calcolo, di quelle date dal Voigt; ma non è possibile riassumer brevemente i calcoli a ciò relativi.

G. J. MICHAËLIS. *Sulla teoria molecolare dell' elasticità dei solidi.* — L' A. mostra come le forze che servono a spiegare i fenomeni d' elasticità possano ottenersi ammettendo che in quei fenomeni le azioni scambievoli fra le molecole sieno sensibili soltanto a piccole distanze, che perciò le particelle contenute entro una sfera d' azione posson ritenersi come disposte parallelamente fra loro e che i loro centri di gravità non sieno distribuiti uniformemente anche se la disposizione media in una particella finita del corpo studiato è isotropa.

Archives des Sciences phys. et nat. — Vol. XXVI, 1891.

E. BICHAT. *Sul calcolo delle frange di Talbot.* — Per mezzo di una rappresentazione geometrica della regola della composizione delle vibrazioni di Fresnel, il Cornu riuscì a risolvere in modo quasi intuitivo la maggior parte dei problemi classici della dif-

frazione di un' onda cilindrica. L' A. in questa breve Nota mostra come, seguendo lo stesso metodo, si può trattare rapidamente e in modo elementare il caso relativamente complesso delle frange di Talbot, cioè della diffrazione dovuta a una fenditura ricoperta per metà da una lamina trasparente.

E. Hagenbach-Bischoff e L. Zehnder. — *Sulla natura delle scintille nelle oscillazioni elettriche di* Hertz. — Considerando la grande importanza che le esperienze di Hertz hanno relativamente al concetto di Faraday e di Maxwell secondo i quali l'azione a distanza nell' induzione sarebbe dovuta a un' energia trasmessa per ondulazioni, e poichè tali esperienze indicano una connessione precisa fra la luce e l' elettricità, e riconducono la differenza fra l' irraggiamento luminoso e quello elettrico a una differenza di lunghezza d' onda, gli A. hanno preso a studiare se le oscillazioni elettriche, in seguito alle osservazioni e alle misure cui si posson sottoporre, ci obbligano ad accettare quel nuovo concetto, o se si possono spiegare ugualmente bene per mezzo delle leggi conosciute ed ammesse dell' induzione.

Ripetendo le esperienze sugli specchi parabolici, seguendo in tutto le indicazioni di Hertz, gli A. hanno costatato che una lastra metallica, introdotta fra i due specchi, intercetta le scintille nel conduttor secondario tanto se è parallela quanto se è perpendicolare alla congiungente i fuochi degli specchi, ciò che l' analogia dei raggiamenti luminosi ed elettrici non farebbe prevedere. Essi hanno perciò ripetute le altre esperienze di Hertz controllando l' osservazione della scintilla per mezzo di un apparecchio di misura, e servendosi a tale oggetto di un elettrometro e di un galvanometro.

Gli A. hanno ritenuto da prima necessario di confermare con esperienze dirette le idee accettate sui fenomeni che avvengono nel conduttore primario. Poichè la quantità di elettricità che forma la corrente indotta di chiusura è uguale a quella che forma l' indotta di apertura, interrompendo a mano la corrente inducente, e facendo circolare l' indotta in un galvanometro a lente oscillazioni, si ottengono due deviazioni uguali e opposte; ma se le interruzioni della corrente indotta sono rapide, l' ago del galvanometro non risponde alla rapidità degli impulsi opposti e resta in riposo a 0°; soltanto si osserva una oscillazione in un senso al principio, e una in senso opposto alla fine. Se nel circuito indotto si ha una distanza esplosiva, il galvanometro non potrà deviare altro che per la corrente di rottura, e la deviazione aumenterà colla distanza esplosiva, raggiungerà un massimo e decrescerà poi per annullarsi quando la distanza esplosiva non lascierà più passare la scintilla.

Se il galvanometro si pone in derivazione sulla distanza esplosiva, la deviazione del suo ago sarà di senso opposto al precedente e corrisponderà alla corrente di chiusura; perchè, in questo caso, la corrente di rottura si scaricherà in parte per la distanza esplosiva, e nel circuito del galvanometro dominerà quella di chiusura.

A ogni apertura del circuito inducente corrisponde dunque sempre una scintilla di ugual senso, che può tuttavia scomporsi in una serie di scariche parziali che si succedono rapidamente. Infatti se per una certa distanza esplosiva le due metà del conduttore hanno capacità tali che le quantità di elettricità che ricevono durante una sola rottura della corrente la porti esattamente al potenziale necessario per vincere la distanza esplosiva, non vi sarà che una sola scintilla; ma se, conservando inalterate quelle capacità, si diminuisce la distanza esplosiva, quella stessa quantità di elettricità basterà per produrre molte scariche fra le due metà del conduttore principale. Gli A. non si fermano a discutere fino a qual punto sarebbe permesso di chiamare « oscillazioni » queste scariche parziali successive nelle quali si decompone la scintilla quando le capacità dei conduttori son molto inferiori a quelle che darebbero luogo a una scintilla unica; ma fanno intanto osservare che mancano esperienze dirette che dimostrino che nelle scintille del conduttor primario si tratta di un va e vieni dell' elettricità corrispondente ad oscillazioni in senso opposto, come manca la dimostrazione dell' eguaglianza della durata di tali oscillazioni: due ipotesi che per le ondulazioni sonore e luminose sono ammesse a titolo di assioma.

Ogni scintilla del circuito primario determinerà in un circuito secondario di Hertz due forze elettromotrici di senso opposto che si succedono rapidissimamente; e se in questo conduttore secondario non si posson produrre scintille, è facile intendere che nè il galvanometro nè l' elettrometro a carica costante potranno dare alcuna deviazione; ma le cose mutano affatto se nel secondario vi è un interruzione che lasci passare la corrente a forte tensione più facilmente di quella a tensione più debole.

Mentre nel conduttore primario la scintilla passa sempre in un medesimo senso, nel secondario passa alternativamente nei due sensi: se ne ha una prova anche nelle così dette figure di Priestley, che si formano su un solo elettrodo del conduttore primario, e su ambedue gli elettrodi del secondario.

Esaminando il fenomeno con un elettrometro Mascart, il cui ago aveva una carica costante, e le due coppie di quadranti comunicavano con le due metà del conduttor secondario, mentre il

rocchetto funzionava la deviazione restava presso a poco costante; ma interrompendo la corrente, l' ago deviava in modo indipendente dal primo sia pel senso che per l' ampiezza, accennando a una differenza di potenziale di circa 40 v.

Per spiegar questi fenomeni bisogna notare che il tempo che dura la scintilla primaria e quello durante il quale sono attive le forze elettromotrici $+e$ e $-e$ sono brevissimi rispetto al tempo che passa fra due scintille consecutive: l' ago dell' elettrometro indicherà perciò, colle sue deviazioni, soltanto le cariche che acquista l' elettrometro nel tempo che separa due scintille consecutive.

Ritenendo per es. le due metà del conduttore secondario verticali e affacciate all' interruzione del primario, si supponga che nell' interruzione primaria l' elettricità positiva passi dall' elettrodo superiore a quello inferiore; allora nell' interruzione del secondario si avrà da prima una forza elettromotrice $+e$ che farà passare elettricità positiva dall' elettrodo inferiore al superiore e immediatamente dopo un' altra $-e$ che farà passare elettricità positiva in senso opposto. Quest' ultimo impulso sarà favorito dalla prima scarica effettuata sotto l' influenza di $+e$, ed in oltre la scintilla di senso contrario potrà passare più facilmente perchè la prima scintilla avrà reso più conduttrice la distanza esplosiva. Perciò l' elettricità positiva avrà più facilità di passare dall' alto al basso che dal basso all' alto nel conduttor secondario, astraendo pure dai valori di $+e$ e di $-e$, purchè la prima scintilla sia prodotta da $+e$. Ne consegue che se la metà superiore del conduttor primario sarà carica positivamente si potrà dedurre con certezza che la forza elettromotrice $+e$ prevaleva; ma se è il conduttore inferiore che è positivo, non ne segue che debba esser $-e$ maggiore di $+e$, perchè ciò potrebbe derivare anche dal fatto che l' elettricità è passata più facilmente dall' alto in basso che in senso opposto.

Quando l' interruttore è in azione e si ha una serie di scintille consecutive, ogni scintilla del primario cambierà per induzione la carica del secondario e dell' elettrometro: la forza che agisce sull' ago non resta costante che negli intervalli che separano due scintille e acquisterà poi a un tratto un valore ora più grande, ora più piccolo, ora di segno contrario; e poichè l' ago non potrà seguire questi rapidi impulsi, avrà un' oscillazione irregolare e la sua deviazione media mostrerà quale dei due sensi è predominante. Soltanto alla rottura definitiva della corrente la carica potrà produrre il suo effetto totale sull' ago e darà luogo a una deviazione costante.

Anche col galvanometro, disposto in derivazione sulla scintilla

del secondario, la deviazione dell' ago indicherà il senso, nel quale passa un' eccesso di elettricità positiva nella distanza esplosiva. E con questo e coll' elettrometro, gli A. hanno riconosciuto che per grandi distanze esplosive vi ha eccesso di elettricità positiva che passa nel senso che è determinato dalla forza elettromotrice $+e$; per piccole distanze esplosive vi ha eccesso nel senso opposto.

Dalle loro esperienze gli A. concludono che le scintille secondarie determinate per induzione sono di natura diversa da quelle del conduttore primario. A ogni scarica nel primario, che avviene sempre nello stesso senso, corrispondono nella distanza esplosiva del secondario due scariche vicinissime fra loro e di sensi opposti: di queste due scariche predomina ora l' una, ora l' altra, secondo l' influenza esercitata dal modo con cui si produce e cessa la scintilla primaria, e secondo la natura e la lunghezza dell' interruzione secondaria. Le leggi note dell' induzione rendon conto del carattere essenziale di questi fatti, benchè non sia possibile seguitare i dettagli col calcolo. Ma, secondo gli A., la loro diversità si spiegherebbe difficilmente se si considerassero, come fa Hertz, le scintille primarie quali semplici oscillazioni la cui energia, trasmessa attraverso il dielettrico secondo le idee del Maxwell, venga a riprodurre nel conduttore secondario delle oscillazioni simili ed altrettanto semplici.

Gli A. sperano di poter spiegare, con altre esperienze, la risonanza e l' esistenza dei massimi e minimi dell' azione a distanza nei conduttori e nei dielettrici.

L. De La Rive. *Sulla teoria delle pressioni elettrostatiche.* —

I. *Equilibrio del volume elementare del dielettrico.* — Maxwell ha dimostrato che in elettrostatica all' ipotesi dell' azione a distanza si può sostituire quella d' una pressione che si eserciti nel dielettrico e alla quale partecipi lo strato infinitamente sottile dell' elettricità libera alla superficie del conduttore. L' A. fa osservare che per rendersi conto dell' equilibrio di un volume elementare che è un tronco di cono dovuto alla sezione di un tubo di forza a base circolare per mezzo di due superficie equipotenziali, è necessario tener conto dell' inclinazione infinitesima delle linee di forza sulla base, e trova che questa inclinazione compensa l'aumento di pressione, talchè se x è il raggio della base S, z l' altezza, θ l' angolo della generatrice coll' asse, F la f. e. m. in S, il volume elementare risente una pressione $2\pi F' x \theta z$ in senso contrario alla tensione che si esercita in S come differenza delle tensioni sulle due basi del tronco, e una pressione uguale ed opposta come risultante delle pressioni laterali, e quel volume elementare è quindi in equilibrio.

II. Le espressioni analitiche dell' energia e della tensione nel dielettrico della teoria di Maxwell possono ottenersi valutando la quantità di moto del fluido elettrico supposto incompressibile.

Infatti, ammettendo che esistano dei centri di flusso agenti per propulsione o centri positivi, e dei centri di flusso agenti per aspirazione, o negativi, e che in un punto qualunque la velocità del fluido sia la resultante, ottenuta colle ordinarie regole della composizione, delle velocità simultanee che sarebbero dovute a tutti i centri di flusso agenti isolatamente, l' A. trova per la quantità di moto totale l' espressione

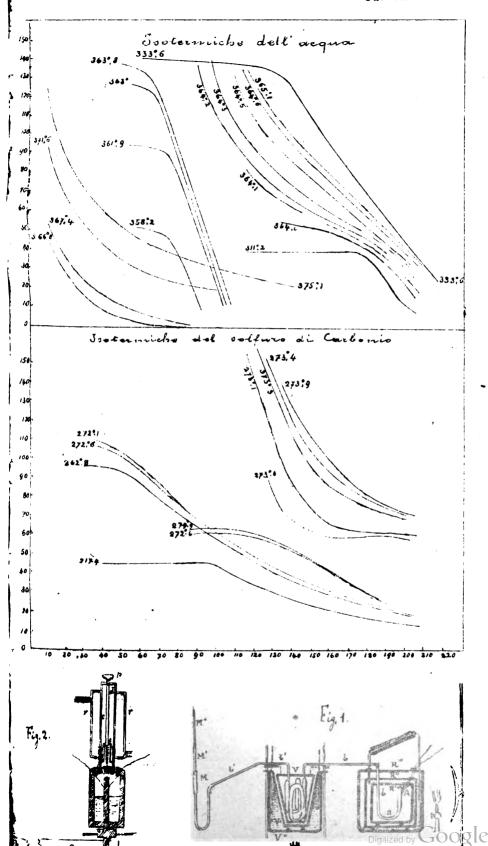
$$\delta K' d\tau \left(\frac{d\Phi}{dn}\right)^2$$

essendo δ la densità del fluido, K' un coefficiente numerico, $d\tau$ l' elemento di volume, e $\frac{d\Phi}{dn}$ la velocità del fluido in quell' elemento. Maxwell trova per l' energia del fluido l' espressione $K/8\pi \times (d\phi/dn)^2$ che viene identica alla precedente ponendo

$$K = 4\pi\,\delta K'.$$

Ne resulterebbe perciò che il potere induttore specifico è uguale al coefficiente di contrazione lineare moltiplicato per la massa di una sfera di raggio 1.

Per trovare il valore della pressione allo stato d' equilibrio, si consideri uno spostamento piccolissimo ε dello strato limite. Il lavoro ha per espressione $\frac{1}{2}\delta K . dS \varepsilon (d\phi/dn)^2$; e poichè lo spostamento è ε, la pressione riferita all' unità di superficie è $\frac{1}{2}\delta K (d\phi/dn)^2$, come si trova colla teoria di Maxwell.

Isotermiche dell' acqua
Isotermiche del solfuro di Carbonio
Fig. 2.
Fig. 1.

FORMULA EMPIRICA RELATIVA ALL' ASSORBIMENTO DELLE RADIAZIONI SOLARI ATTRAVERSO L' ATMOSFERA; DEI PROF. ADOLFO BARTOLI ED ENRICO STRACCIATI.

In una memoria precedente nella quale discutemmo le numerose serie di determinazioni da noi eseguite in Italia dal 1885 in poi, coi metodi calorimetrici i più rigorosi, giungemmo alle seguenti conclusioni [1]).

« Riunendo le diverse osservazioni di una mattina (o di una sera) in tanti gruppi, in ciascheduno dei quali la massa atmosferica ε varî poco, per ciascheduno di questi gruppi vale la formula adoperata dal Pouillet

$$Q = Ap^{\varepsilon}$$

« Le due costanti A e p variano da gruppo a gruppo, cioè p cresce col crescere di ε, mentre A diminuisce, (resultato identico a quello trovato a Padova dal Rossetti).

« Tutte le nostre osservazioni provano inoltre, che in una data stazione, nelle diverse epoche, dell' anno le costanti A e p (corrispondenti ad uno stesso determinato valore di ε) crescono col diminuire della *tensione* del vapore acqueo, nell' atmosfera: lo stesso avviene per la quantità AD^2, dove D indica la lunghezza del raggio vettore che dal sole va alla terra. Invece, lo stato igrometrico dell' aria non ha sensibile influenza sui valori di A e di p: resultato che conferma quelli trovati dal Violle ».

« Infine dalle nostre misure resulta, contrariamente a quanto aveva trovato il Frölich, non esservi dipendenza fra il valore di A od anche di AD^2 ed il numero e la estensione relativa delle macchie solari.

« Dunque la costante A dipende principalmente dal valore di ε e da quello della tensione f del vapore acqueo: Da un numero grandissimo di medie ricavata una formula empirica

1) A. Bartoli ed E. Stracciati *Misure del calore solare* eseguite in Italia dal 1885 in poi; *Nuovo Cimento* serie terza, vol. XXIX, pag. 63, Pisa 1891; *Bullettino dell'Accademia Gioenia* in Catania, fascicolo VII, maggio 1889; *Bullettino mensuale della società meteorologica italiana,* serie sec. Vol. XI, pag. 129.

$$AD^2 = \phi(\varepsilon, f)$$

ponendo in questa $f = 0$ e poi $\varepsilon = 0$, si otterrà per AD^2 un valore A_0 che esprimerà il valore approssimato della costante solare ».

Seguitando ora noi, in queste misure eliotermiche, e nei calcoli e nella discussione dei resultati, ci siamo convinti che difficilmente si può rappresentare l'andamento del fenomeno, con una formula semplice, che abbracci tutte le misure fatte nella prima o nella seconda metà del giorno.

Il Rossetti, che pubblicò nel 1877 un'importante studio *sulla temperatura del sole,* tentò invano delle formule empiriche della forma

$$q = a\, b^{\frac{\varepsilon}{\gamma + \varepsilon}}$$

$$q = \alpha + m\, \beta^{\varepsilon} + n \gamma^{\varepsilon}$$

dove a, b, m, n, α, β, γ sono costanti da determinarsi.

Quando ci si contenta di rappresentare q in funzione di ε, per valori di ε non grandi (come per altezze del sole superiori ai quindici gradi) si possono trovare moltissime formule empiriche che rappresentano quasi egualmente bene l'andamento del fenomeno.

Così per es. il Radau [1]), nel suo pregevole lavoro sull'Acti-

1) Si veda la pregevolissima monografia di R. Radau, *Actinométrie,* Parigi, Gauthier-Villars, 1877. D'altra parte è noto, che quando ci si contenti di una determinata approssimazione, è facile trovare formule empiriche diverse, che rappresentino abbastanza bene l'andamento di un fenomeno.

Così per esempio le espressioni

$$\operatorname{cosec.} a$$

e l'altra

$$-80 \operatorname{sen} a + \sqrt{161 + 6400 \operatorname{sen}^2 a}$$

e così pure la serie di Bouguer dànno, per a compresa fra 30° e 90°, dei valori che differiscono fra loro meno del 2 per cento. Vedasi a questo proposito, Radau, opera citata, e le sue pregevoli pubblicazioni, inserite nel *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques,* Paris, Gauthier-Villars, e così puro l'importante lavoro di G. V.

nometria prova che una serie di determinazioni può essere ugualmente bene interpetrata con le seguenti formule

$$\text{I} \qquad Q = 1{,}8\left(\frac{5}{6}\right)^{\varepsilon}$$

$$\text{II} \qquad Q = 0{,}3 + 1{,}6\left(\frac{3}{4}\right)^{\varepsilon}$$

$$\text{III} \qquad Q = 0{,}5 + 1{,}5\left(\frac{2}{3}\right)^{\varepsilon}$$

$$\text{IV} \qquad Q = \frac{10}{9}\left(\frac{9}{10}\right)^{\varepsilon} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\varepsilon}$$

$$\text{V} \qquad Q = \frac{2{,}1}{1 + 0{,}412_{\varepsilon}}$$

$$\text{VI} \qquad Q = 0{,}5 + \frac{0{,}827}{\varepsilon} + \frac{1{,}852}{\varepsilon^{2}} - \frac{1{,}679}{\varepsilon^{3}}\ .$$

Un' altra serie, viene dal Radau rappresentata con le tre formule

$$Q = 0{,}488 + 1{,}7\left(\frac{2}{3}\right)^{\varepsilon}$$

$$Q = 1{,}653\ (0{,}847)^{\varepsilon}$$

$$Q = \frac{5}{2 + \varepsilon}\ .$$

Le formule proposte ed adoperate dai fisici che si sono occupati di questi studî sono le più diverse: così il Pouillet adoperò la formula

$$Q = Ap^{\varepsilon}$$

ed il Forbes, l' altra

$$Q = a + b\ \alpha^{\varepsilon}$$

Schiaparelli, *Sul modo di ricavare la vera espressione delle leggi della natura dalle curve empiriche;* Milano, stamperia reale 1867; ed A. Bartoli, *Sulla coesistenza di formule empiriche diverse, ed in ispecie su quelle che contengono la costante capillare dei liquidi e la coesione dei solidi, Nuovo Cimento* 1884; *Gazzetta chimica* di Palermo 1884; e *Rendiconti dell'Acc. de Lincei*, seduta del 15 giugno 1884.

Il Crova, ha adoperato invece la seguente

$$Q = \frac{A}{(1 + a\,\varepsilon)^b}.$$

Fra tante diverse formule empiriche le quali, possono con uguale precisione, rappresentare entro certi limiti l' andamento di un fenomeno, le più utili sono quelle nelle quali *le costanti ammettono una interpetrazione fisica*: e nel caso nostro questa condizione è unicamente soddisfatta dalle formule a esponenziali come quella di Lambert-Pouillet

$$Q = A\,p^{\varepsilon}$$

o dall' altra [1])

$$Q = A_1 p_1^{\varepsilon} + A_2 p_2^{\varepsilon} + \ldots + A_n p_n^{\varepsilon}$$

1) Vedansi: Lambert *Photometria, sive de mensura et gradibus luminis, colorum, et umbrae;* August. Vindelicorum, 1776.

De Saussure, *Voyage dans les Alpes* tom. II, pag. 294, 315 e 497-499.

Bouguer *Voyages au Perou*, pag. 51.

Bouguer *De diversis luminis gradibus dimetiendis*, Viennae 1762.

Laplace *Mécan. céleste*, tomo IV, libro 10° cap. I e II: *Des réfractions astronomiques et des réfractions terrestres.*

Pouillet *Comptes Rendus.* VII pag. 24; Herschell *Comptes Rendus*, tomo 3° p. 50; Forbes, *Phylos. Transactions* 1842, part. II, pag. 225: Althans *Pogg. Ann.* t. 90 pag. 544: Quetelet, *Meteorologie de la Belgique*, Bruxelles 1847, pag. 43: Waterston *Phylos. Magazine (Fourth series)* vol. 19, pag. 338.

De Gasparin *Comptes Rendus*, t. 26, pag. 974, Kaemtz, *Lehrbuch der Meteorol.* Bd. III, s. 14.

Soret *Bibl. Univ. de Génève (passim): Comptes Rendus du congres de Bordeaux seance du 6 septembre 1872.*

Desains *Comptes Rendus* t. 69, pag. 1133; t. 78 pag. 145; t. 80 pag. 1420.

Secchi *Le soleil*, II partie, Livre VI pag. 227 a 282; *Comptes rendus* t. 73, pag. 1301: t. 74, pag. 301.

Dufour *Bibl. Univ. de Génève*, 1873, t. 48, pag. 129,

Rossetti *Nuovo Cimento*, terza serie, t. 3° pag. 238 a 256.

Crova *Annales de Ch. et de Phys.* 5 serie t. 11° pag. 433, t. 19° pag. 1: *Association francaise pour l' avancement des sciences*, Congres de Montpellier; et *Comptes Rendus, passim.*

Violle *Rapport sur la question 19 du programme pour le congres météorologique de Rome.* Utrecht, Kervink et fils *Annales de Chimie et de Physique* 5 s. t. 10, pag. 289, 1879. *Journal de Physique* t. V. pag. 169.

Langley, *Researches on solar heat and its absorption by the earth's atmosphere; a report of the Mount Whitney expedition:* Washington 1884; ed *American Journal of science and arts: passim.*

Frölich, *Annalen der Physik und Chemie* 1884 Bd. XXI, 1887, Bd. XXX.

Radau, *Actinometrie*, Paris Gauthier Villars 1877.

Ma però una formula *semplicissima* che rappresenti discretamente qualunque serie completa, per qualunque valore di ε, ha certamente un qualche interesse, anche se la formula è puramente empirica, e se le costanti che vi entrano non possono ricevere una interpetrazione fisica.

Tale è la seguente

$$Q \varepsilon^n = C \tag{1}$$

dove n e C sono due costanti, di cui la prima n ha valori compresi

fra 0,25 e 0,70

ed ε è la massa atmosferica, calcolata con la formula di Laplace oppure con la serie di Bouguer.

Questa formula (1) si applica, per le giornate ben serene, a un intiera serie di esperienze, qualunque sia il valore di ε, cioè anche col sole bassissimo; e questo è il pregio principale della formula; non è però maraviglia se nelle giornate in cui la serenità del cielo si è offuscata, la formula dia resultati meno approssimati.

Seguono senz'altro le tavole che provano l'applicabilità della nostra formula.

In queste tavole t rappresenta il riscaldamento corretto della cassetta pireliometrica, il quale è, in ciascuna serie, proporzionale alla quantità di calore Q raggiata normalmente dal sole sull'unità di superficie nera, nell'unità di tempo.

I valori di ε sono calcolati con la formula di Laplace la quale dà per ε dei valori quasi uguali a quelli calcolati con la serie di Bouguer.

Tavola I.

Etna (antica casa degli inglesi) — Altitudine 2942 m.
Prof. Bartoli: la mattina del 30 agosto 1890.

Altezza	ε	log t	log C
3°40'	12,979	9,197	9,568
5 50	9,005	9,249	9,567
8 0	6,830	9,291	9,569
10 5	5,526	9,323	9,570
12 20	4,576	9,356	9,576
14 10	4,019	9,376	9,577
25 35	2,303	9,456	9,577
29 0	2,053	9,474	9,578
33 20	1,813	9,489	9,575
37 15	1,646	9,506	9,579
43 15	1,456	9,518	9,572
48 55	1,326	9,528	9,570
58 5	1,178	9,540	9,567

$\log C = \log t + {}^1/_3 \log \varepsilon$

Tavola II.

Etna (antica casa degli inglesi) — Altitudine 2942 m.
Prof. Bartoli: la mattina del 2 agosto 1890.

Altezza	ε	log t	log C
6°30'	8,207	9,270	9,565
8 35	6,408	9,297	9,566
10 45	5,207	9,320	9,558
13 0	4,356	9,341	9,554
15 40	3,654	9,368	9,555
17 50	3,230	9,391	9,561
20 20	2,853	9,408	9,560
22 55	2,551	9,432	9,568
25 40	2,297	9,442	9,562
28 40	2,074	9,457	9,563
35 25	1,721	9,478	9,556
39 20	1,573	9,493	9,559
47 40	1,351	9,512	9,556
61 50	1,134	9,531	9,549

$\log C = \log t + {}^1/_3 \log \varepsilon$

Tavola III.

Etna (*Casa del bosco*) — Altitudine 1440 m.
Prof. Bartoli: la mattina del 24 novembre 1888.

Altezza	ε	$\log t$	$\log C$
8° 0'	6,830	9,399	9,607
10 50	5,169	9,419	9,599
13 10	4,304	9,449	9,607
15 40	3,654	9,458	9.598
18 15	3,164	9,472	9,597
20 40	2,809	9,480	9,592
23 25	2,501	9,500	9,599
27 25	2,162	9,514	9,598

$$\log C = \log t + {}^1/_4 \log \varepsilon$$

Tavola IV.

Etna (*Casa del bosco*) — Altitudine 1440 m.
Prof. Bartoli: la mattina del 26 novembre 1889.

Altezza	ε	$\log t$	$\log C$
9° 7'	6,066	9,365	9,626
11 10	5,025	9,387	9,620
13 2	4,366	9,412	9,625
15 0	3,805	9,435	9,628
17 0	3,379	9,452	9,628
19 12	3,026	9,464	9,624
22 52	2,564	9,493	9,629
25 48	2,285	9,505	9,624
30 50	1,944	9,524	9,620

$$\log C = \log t + {}^1/_3 \log \varepsilon$$

Tavola V.

Etna (*Casa del bosco*) — Altitudine 1449 m.
Prof. Bartoli: la sera del 23 luglio 1888.

Altezza	ε	$\log t$	$\log C$
55°45′	1,210	9,494	9,527
45 50	1,392	9,469	9,526
39 0	1,585	9,449	9,530
32 50	1,838	9,424	9,530
27 40	2,144	9,400	9,532
22 40	2,577	9,362	9,527
18 40	3,096	9,359	9,523
14 50	3,847	9,289	9,523
10 45	5,206	9,244	9,531

$$\log C = \log t + {}^2/_5 \log \varepsilon$$

Tavola VI.

Etna (*Casa del bosco*). — Altitudine 1440 m.
Prof. Bartoli: la sera del 18 luglio 1888.

Altezza	ε	$\log t$	$\log C$
59°15′	1,164	9,507	9,540
45 30	1,399	9,468	9,541
35 30	1,717	9,430	9,547
29 30	2,022	9,395	9,548
24 30	2,397	9,362	9,552
20 50	2,789	9,329	9,552
16 30	3,484	9,288	9,559
12 50	4,409	9,234	9,556
9 50	5,655	9,177	9,553
5 50	9,005	9,068	9,545

$$\log C = \log t + {}^1/_2 \log \varepsilon$$

Tavola VII.

Catania (Villa Zuccaro). — Altitudine 80 m.
Prof. Stracciati: la mattina del 28 gennaio 1890.

Altezza	ε	log t	log C	
10°55′	5,132	9,245	9,483	
13 10	4,304	9,272	9,484	
15 20	3,729	9,300	9,490	
17 20	3,317	9,316	9,490	
19 10	3,020	9,325	9,485	$\log C = \log t + {}^1/_3 \log \varepsilon$
21 10	2,747	9,341	9,488	
23 15	2,517	9,349	9,483	
25 30	2,310	9,362	9,483	
27 30	2,156	9,372	9,484	

Tavola VIII.

Catania (Villa Zuccaro) — Altitudine 80 m.
Prof. Bartoli: la sera del 10 luglio 1889.

Altezza	ε	log t	log C	
73°20′	1,044	9,344	9,354	
65 40	1,098	9,325	9,350	
59 25	1,162	9,309	9,348	
52 5	1,267	9,284	9,345	
41 0	1,521	9,236	9,345	
36 30	1,675	9,221	9,354	
32 50	1,838	9,196	9,355	$\log C = \log t + {}^3/_5 \log \varepsilon$
29 0	2,053	9,164	9,351	
25 40	2,297	9,128	9,345	
21 45	2,679	9,092	0,349	
20 20	2,853	9,079	9,352	
17 50	3,230	9,047	9,352	
15 20	3,729	9,004	9,347	
8 0	6,830	8,850	9,350	

TAVOLA XI.

Firenze, Sommità di Pian grande (*Comune di Calenzano*).
Altitudine metri 515.
Prof. Bartoli: la mattina del 2 ottobre 1886.

Altezza	ε	log t	log C	
6° 0'	8,792	9,029	9,322	
16 50	3,413	9,160	9,325	
20 10	2,875	9,183	9,325	
23 25	2,501	9,199	9,323	$\log C = \log t + 0{,}310 \log \varepsilon$
26 28	2,232	9,219	9,327	
29 20	2,032	9,234	9,329	
36 50	1,662	9,2620	9,328	
42 55	1,466	9,272	9,324	

TAVOLA X.

Firenze, (*Sommità di Pian grande*) — Altitudine 515 m.
Prof. Bartoli: la mattina del 15 ottobre 1886.

Altezza	ε	log t	log C	
10° 5'	5,527	9,156	9,411	
13 20	4,253	9,197	9,413	
17 12	3,345	9,232	9,413	
20 17	2,859	9,261	9,418	$\log C = \log t + 0{,}344 \log \varepsilon$
23 0	2,543	9,279	9,418	
28 40	2,074	9,310	0,419	
33 40	1,797	9,324	9,412	
36 47	1,664	9,336	9,412	

TAVOLA XI.

Firenze (*Sommità di Pian grande*) — Altitudine 515 m.
Prof. Bartoli: la mattina del 20 novembre 1886.

Altezza	ε	$\log t$	$\log C$
5°40'	9,228	9,043	9,526
10 0	5,568	9,159	9,532
14 0	4,062	9,230	9,533
17 0	3,379	9,262	9,526
19 35	2,956	9,288	9,524
21 20	2,726	9,302	9,520
22 55	2,550	9,322	9,525
24 30	2,397	9,340	9,530

$$\log C = \log t + 0{,}500 \log \varepsilon$$

TAVOLA XII.

Arezzo (*orto del poggio*) Altitudine 300 m. circa
Prof. Stracciati: la mattina del 31 agosto 1889.

Altezza	ε	$\log t$	$\log C$
19°43'	2,935	9,976	0,155
22 27	2,601	0,001	0,159
26 8	2,258	0,025	0,160
29 34	2,018	0,043	0,160
33 5	1,826	0,058	0,158
36 23	1,681	0,073	0,159
39 34	1,566	0,084	0,160
44 26	1,425	0,100	0,159
48 58	1,324	0,109	0,156

$$\log C = \log t + 0{,}383 \log \varepsilon$$

Tavola XIII.

Arezzo (orto del Poggio) — Altitudine 300 m.
Prof. Stracciati: la mattina del 14 settembre 1886.

Altezza	ε	$\log t$	$\log C$	
11° 0′	5,095	9,036	9,425	
17 59	3,203	9,143	9,422	
20 41	2,807	9,184	9,431	
24 59	2,354	9,228	9,432	$\log C = \log t + 0{,}550 \log \varepsilon$
29 49	2,003	9,263	9,429	
36 4	1,694	9,301	9,427	
42 9	1,486	9,338	9,433	
49 51	1,307	9,362	9,423	

Tavola XIV.

Parigi — Determinazioni del Pouillet: 11 maggio 1838.

Altezza	ε	$\log t$	$\log C$	
59° 0′	1,164	0,0659	0,738	
56 40	1,193	0,0766	0,739	
50 40	1,288	0,1099	0,737	
42 20	1,473	0,1682	0,749	$\log C = \log t + 0{,}462 \log \varepsilon$
32 57	1,812	0,2582	0,742	
23 7	2,465	0,3918	0,743	
13 20	3,943	0,5958	0,707 [1]	

1) Il valore di ε accettato dal Pouillet, è calcolato con la formula di Lambert; con la formula di Laplace, quest'ultimo valore di ε diviene 4,258 in luogo di 3,943: e il valore di C diviene 0,7218.

Tavola XV.

Determinazioni del Prof. Rossetti, Padova il 29 sett. 1877.

Altezza	ε	log t	log C
45°20'	1,40	2,3155	2,374
41 40	1,50	2,3073	2,378
29 50	2,00	2,2667	2,387
23 25	2,50	2,2279	2,387
22 25	2,60	2,2204	2,386
19 15	3,00	2,2047	2,395
18 0	3,20	2,1847	2,587
16 20	3,50	2,1629	2,380
14 15	4,00	2,1399	2,381
12 35	4,50	2,1229	2,384
11 35	4,84	2,1139	2,388
11 15	5,00	2,1075	2,387
10 5	5,50	2,0899	2,386
8 10	6,69	2,0374	2,368

$\log C = \log t + 0{,}400 \log \varepsilon$

Da queste tavole si deduce che la formula

$$Q\,\varepsilon^n = \text{costante} \tag{1}$$

è assai bene verificata, e vale così per piccolissime altezze come per altezze rilevanti. Le piccole oscillazioni nel valore di C in ciascheduna serie potrebbero attribuirsi in parte anche alla impossibilità che le condizioni atmosferiche, e segnatamente la serenità del cielo, la tensione del vapore acqueo si mantengano costanti per una mezza giornata. Nessun' altra formula empirica semplice si presta come questa per un intervallo di altezze fra 3° e 70°.

Se la confrontiamo con la formula razionale

$$Q = A\,p^{\varepsilon}$$

riguardando A costante e p variabile collo spessore ε, si deduce

$$\log p = \frac{\log p_1 - n \log \varepsilon}{\varepsilon}$$

avendo indicato con p_1 il coefficiente atmosferico corrispondente allo spessore $\varepsilon = 1$.

Supponendo $p_1 = 0{,}7940$ (che è un valore medio ed $n = \frac{1}{2}$) si ottengono da questa ultima formula i seguenti valori per p

$\varepsilon = 1{,}5$	$p = 0{,}749$
$\varepsilon = 2$	$p = 0{,}749$
$\varepsilon = 3$	$p = 0{,}771$
$\varepsilon = 4$	$p = 0{,}794$
$\varepsilon = 5$	$p = 0{,}813$
$\varepsilon = 6$	$p = 0{,}829$
$\varepsilon = 10$	$p = 0{,}871$

cioè che il coefficiente atmosferico cresce col crescere dello spessore dell' atmosfera traversata dai raggi solari, resultato già trovato dal compianto Prof. F. Rossetti e da noi confermato nella memoria sopra citata [1]).

La formula (1) può mettersi anche sotto la forma

$$Q \operatorname{cosec}^n a = \text{costante}$$

oppure sotto l' altra

$$Q \sec^n z = \text{costante}$$

avendo indicate, con a e con z, l' altezza e la distanza zenitale del sole.

1) Rossetti, *Sulla temperatura del sole; indagini sperimentali, Nuovo Cimento,* III serie, t. 3° pag. 238, Pisa 1878 e Bartoli e Stracciati, *Misure del calore solare eseguite in Italia dal 1885 in poi; Bullettino mensile dell' Accademia Gioenia di Catania,* fascicolo VII, maggio 1889; *Nuovo Cimento,* serie III, vol. 29, pag. 63, Pisa 1891; *Bullettino mensuale dell' associazione meteorologica italiana,* serie II, vol. XI, pag. 129, Torino 1891.

Infatti per valori di $a > 4^{\circ}$ e di $z < 86^{\circ}$ si ha prossimamente

$$\operatorname{cosec} a = \varepsilon$$

come risulta dalla tavola seguente

Tavola XVI.

z dist. zenitale	sec z	ε Laplace
90°	1,000	1,000
80	1,015	1,015
75	1,035	1,035
70	1,064	1,064
65	1,103	1,103
60	1,155	1,155
55	1,221	1,221
50	1,305	1,305
45	1,414	1,413
40	1,556	1,555
35	1,743	1,740
30	2,000	1,995
25	2,366	2,352
20	2,924	2,900
15	3,864	3,805
10	5,759	5, 70
8	7, 18	6, 85
6	9, 57	8, 79
4	14, 33	12, 20

La formula (2) può anche scriversi

$$\frac{Q}{\cos^n z} = C.$$

La quantità y di calore che riceve dal sole un decimetro quadro di una superficie nera orizzontale in un minuto primo, quando la distanza zenitale del sole è z, è espressa da $y = Q \cos z$.

Sarà dunque

$$y = C \cos^{n+1} z \qquad (2)$$

ricordando inoltre che

$$\cos z = \operatorname{sen} v \operatorname{sen} d + \cos v \cos d \cos \omega$$

dove v è la latitudine del luogo

d la declinazione del sole a mezzogiorno vero nel giorno dell' esperienza.

ω l' angolo orario del sole corrispondente all' ora dell' esperienza.

Si potrà calcolare approssimativamente per un dato luogo della terra, e per una data epoca dell' anno, la quantità di calore che il sole raggia sopra una superficie piana orizzontale di un decimetro quadro, in una intiera giornata perfettamente serena, in cui l' esponente n rimanga sensibilmente costante, quando siano noti i valori di C e di n.

La (2) dà per y valori troppo piccoli quando $z > 86°$, ma d' altra parte il calore totale versato dal sole sopra una superficie orizzontale, quando il sole si eleva nell' orizzonte da zero fino a 4° è piccolissimo e trascurabile di fronte a quello che esso versa nel rimanente della giornata.

Istituto Fisico dell' Università di Catania
6 aprile 1892.

CONSIDERAZIONI SULLA TEORIA MATEMATICA DEL MAGNETISMO;
MEMORIA DEL PROF. EUGENIO BELTRAMI [1]).

§ 12. Conviene dunque battere un' altra e miglior via, e tale è quella cui guida la considerazione seguente.

S' immagini nuovamente che nello spazio infinito esistano due distinte distribuzieni polari m, m', occupanti gli spazii S, S' comunque scelti. Si può concepire l' insieme di queste due distribuzioni come un unico sistema polare, il quale deve possedere, come tale, un autopotenziale P (V + V'), che ne misuri la totale energia potenziale. Ora, qualunque sia per essere l' espressione analitica di questa grandezza, si può ammettere come evidente, od almeno come diretta conseguenza del concetto di energia, ch' essa debba equivalere alla somma di tre altre espressioni rappresentanti:

1° l' energia propria della prima distribuzione isolatamente considerata;

2° l' energia della seconda distribuzione;

3° l' energia risultante dalla simultanea sussistenza delle due distribuzioni, l' una in presenza dell' altra. Si deve dunque avere

$$\mathrm{P}(V+V')=\mathrm{P}(V)+\mathrm{P}(V')+\mathrm{P}(V,V').$$

Ma, d' altra parte, per la definizione analitica (§ 10) dei potenziali apolari, si ha pure, identicamente,

$$\mathbf{P}(V+V')=\mathbf{P}(V)+\mathbf{P}(V')+\mathbf{P}(V,V'),$$

relazione la quale, del resto, esprime la stessa legge testè invocata, con solo riguardo ai magnetismi liberi delle due distribuzioni. Ora, quando i due spazii S, S' non hanno veruna parte in comune, si ha, come s' è già più volte notato,

$$\mathrm{P}(V,V')=\mathbf{P}(V,V');$$

1) *Continuazione.* Vedi pag. 5.

in questo caso, dunque, formando la differenza delle due equazioni testè scritte, si ottiene:

$$P(V+V') - \mathbf{P}(V+V') = [P(V) - \mathbf{P}(V)] + [P(V') - \mathbf{P}(V')].$$

Ciò posto, la differenza $P(V) - \mathbf{P}(V)$, qualunque ne possa essere l'espressione analitica, è una grandezza che dipende unicamente dalla natura della polarizzazione m e del corpo S, e può essere opportunamente designata con

$$P(V) - \mathbf{P}(V) = p(S),$$

dove p indica una certa operazione, ancora incognita, da farsi sugli elementi analitici che definiscono la polarità e la natura fisica del corpo S, affine di ottenere l'espressione effettiva di quella differenza. Per la stessa ragione si ha

$$P(V') - \mathbf{P}(V') = p(S')$$

e così pure

$$P(V+V') - \mathbf{P}(V+V') = p(S+S'),$$

dove p rappresenta sempre la medesima operazione incognita. Quest'operazione è quindi tale che deve sempre aversi

$$p(S+S') = p(S) + p(S'),$$

sotto la sola condizione che gli spazii S, S' non abbiano parti comuni. Da quest'equazione si passa subito alla

$$p(S) = \Sigma p(\Delta S),$$

dove ΔS è una qualunque delle parti in cui può concepirsi diviso lo spazio S, conservando, naturalmente, a ciascuna la polarità che le spetta nel campo totale S, e quindi alla

$$p(S) = \int_S p(dS).$$

Ora la quantità $p(dS)$ non può avere che la forma ψdS, dove ψ è una funzione incognita delle condizioni fisiche e polari che regnano nell' intorno di quel qualunque punto (a, b, c) di S, al quale è circostante l' elemento dS: si ha dunque finalmente

$$(14) \qquad P(V) = \mathbf{P}(V) + \int \psi dS,$$

dove non resta più da determinare che la funzione incognita ψ, la quale, come si può già prevedere, deve dipendere dalle componenti locali m_a, m_b, m_c ed eventualmente dalle loro derivate, come pure dalle condizioni fisiche del posto ove esiste la polarizzazione individuata da queste componenti.

La dottrina fin qui svolta non somministra, nè può somministrare verun altro lume circa la natura della funzione ψ. Vi è però una legge imprescindibile a cui niuna grandezza meccanica può sottrarsi, ed è la *legge dell' omogeneità*, la quale circoscrive entro certi confini la ricerca della natura di tale funzione. Indicando, come d' uso, con L, M, T le unità concrete di lunghezza, di massa e di tempo, si deve, come è notissimo, poter esprimere ogni energia in unità della specie ML^2T^{-2}. Dovendo quindi l'energia parziale $\int \psi dS$ soddisfare a questa condizione, si riconosce intanto che la funzione ψ dev' essere della specie $ML^{-1}T^{-2}$. Nasce da ciò naturalmente l' idea di ricercare di quale specie sia la grandezza m, dalle di cui componenti la funzione ψ deve certamente dipendere. A tal fine basta osservare che dovendo (1) essere $\mu^2 r^{-2}$ una forza, cioè una grandezza della specie MLT^{-2}, μ dev' essere della specie $M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}$: d' altronde μ è (§ 1) una grandezza della stessa specie di kdS e di $hd\sigma$, epperò (5) mdS è una grandezza della stessa specie del prodotto di μ per una linea. Ne risulta che m è della specie $M^{1/2} L^{-1/2} T^{-1}$ e quindi m^2 della specie $ML^{-1}T^{-2}$; dal che finalmente consegue che ψ *è una grandezza della stessa specie di* m^2.

La più semplice ipotesi che si possa quindi fare sulla forma della funzione ψ è che questa sia una funzione quadratica ed omogenea delle tre componenti m_a, m_b, m_c, con coefficienti (co-

stanti o variabili) di dimensione zero rispetto a tutte tre le unità fondamentali, coefficienti che possono essere discontinui, se il corpo che si considera presenta delle superficie di discontinuità fisica. Quest' ipotesi s' accorda appuntino colle conseguenze della teoria di Poisson ed è quella che si ammetterà nei successivi §§, salvo il far cenno più tardi (§ 17) della logica possibilità d'altre forme meno semplici.

A complemento delle indicazioni date dianzi sulle dimensioni d' alcune grandezze magnetiche, si può aggiungere che μ essendo, come si è veduto, della specie $M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}$, ogni funzione potenziale V è della specie $M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}$, e quindi ogni forza apolare F della specie $M^{1/2} L^{-1/2} T^{-1}$, cioè della stessa specie di m. Di questa stessa specie è quindi $(8)_a$ anche ogni forza polare G: anzi avrebbe bastato por mente alle citate equazioni $(8)_a$ per concludere che m è della specie delle derivate prime di V rispetto alle coordinate e che quindi (14) la seconda parte dell' energia P(V) doveva contenere m^2 nella stessa guisa in cui la prima contiene F^2: ma giovava stabilire direttamente la dimensione di m.

La necessità che P(V) conservi un valore positivo anche per quelle distribuzioni per le quali è dovunque $V = 0$, implica la necessità che il termine $\int \psi dS$ si mantenga positivo per ogni sistema di valori non tutti nulli delle componenti m_a, m_b, m_c e quindi che ψ sia funzione quadratica *essenzialmente positiva* di queste componenti. Anche ciò verrà ammesso nel seguito, salvo il ritornare più tardi sopra l' eventualità d' una ipotesi contraria.

Per determinare il potenziale mutuo di due distribuzioni polari m, m', le quali si concepiscano come esistenti in un medesimo spazio S, basta osservare che, in base alla formola (14), si ha

$$P(V + V') = P(V + V')$$

$$+ \int \left[\psi_m + \psi_{m'} + \frac{d\psi}{dm_a} m_a' + \frac{d\psi}{dm_b} m_b' + \frac{d\psi}{dm_c} m_c' \right] dS,$$

donde segue (14)

$$(14)_a \quad P(V,V') = \mathbf{P}(V,V') + \int\left(\frac{d\psi}{dm_a} m_a' + \frac{d\psi}{dm_b} m_b' + \frac{d\psi}{dm_c} m_c'\right) dS .$$

Questa formola sussiste anche se S è soltanto la *regione comune* a due distinte distribuzioni m, m', di cui sieno V, V′ le funzioni potenziali, giacchè i potenziali mutui delle *regioni non comuni* non danno termini che alla parte apolare $\mathbf{P}(V,V')$ di $P(V, V')$.

§ 13. Il problema dell' induzione magnetica si pone assai facilmente in equazione, mercè i risultati precedenti, invocando il principio del *minimo di energia.*

Sieno S_0, S gli spazii occupati da due distribuzioni magnetiche, spazii che si supporranno finiti e non aventi parti comuni. Se V_0 è la funzione potenziale della prima distribuzione, V quella della seconda, il potenziale P di tutto il sistema è esprimibile nella forma

$$(15) \qquad P = P(V_0) + P(V) + P(V_0, V) .$$

La magnetizzazione di S_0 si suppone *permanente,* quella di S *temporaria*: V_0 è quindi una funzione data ed invariabile, V è invece una funzione incognita della specie (3), dipendente dalla distribuzione polare che si forma *per induzione* in S, sotto l'azione dell' *inducente* S_0. Ammettendo l'invocato principio, questa distribuzione *indotta* m dev' essere tale che, comunque essa venga alterata (entro certi limiti, ristretti quanto si voglia, ma comprendenti un campo finito), il potenziale totale non possa che aumentare di valore.

La cercata distribuzione indotta sia quella di cui V è la funzione potenziale ed m il momento polare. Sia V′ la funzione potenziale d' un' altra qualunque distribuzione m', nello stesso spazio S. Una *variazione* arbitraria della vera distribuzione indotta m si può concepire come risultante dalla sovrapposizione della nuova distribuzione m' alla m. Il potenziale P′ del sistema così *variato* è espresso da:

$$P' = P(V_0) + P(V + V') + P(V_0, V + V'),$$

ossia da:

$$P' = P(V_0) + P(V) + P(V') + P(V,V') + P(V_0,V) + P(V_0,V'),$$

talchè si ha

$$P' - P = P(V') + P(V,V') + P(V_0,V'),$$

o, più semplicemente $(14)_a$,

$$(15)_a \qquad P' - P = P(V_0 + V, V') + P(V').$$

Bisogna dunque che per valori abbastanza piccoli, ma del resto arbitrarii, dei momenti *varianti* m', questa differenza $P' - P$ risulti costantemente maggiore di zero. Tale è già (§ 12) il suo ultimo termine $P(V')$, qualunque sia la distribuzione m'.

Per introdurre la condizione limitativa di quei valori di m' per i quali la proprietà or detta deve verificarsi, si denoti per poco con P_h' ciò che diventa P' quando m', V' diventino rispettivamente hm', hV' e si osservi [(14), $(14)_a$] essere

$$P(hV') = h^2 P(V'), \quad P(V_0 + V, hV') = hP(V_0 + V, V').$$

Si ha quindi

$$P_h' - P = h[P(V_0 + V') + hP(V')].$$

Di qui risulta che se, comunque sia scelta la distribuzione variante m', la quantità $P(V_0 + V, V')$ non è nulla, si può sempre attribuire ad h un tal valore, con tal segno, che, per esso e per ogni valore numericamente più piccolo, la differenza $P_h' - P$ sia e si mantenga minore di zero. Se invece la detta quantità è nulla, questa differenza è certamente maggiore di zero. La condizione necessaria e sufficiente del minimo di energia è quindi

$$(15)_b \qquad P(V_0 + V, V') = 0,$$

e la sussistenza di tale condizione, di fronte all'equazione $(15)_a$ in cui non è imposto alcun limite d'intensità alla distribuzione

variante m', mostra già che si tratta d'un *minimo assoluto ed unico*. Infatti l'equazione $(15)_a$ dà

$$(15)_c \qquad P' = P + P(V'),$$

cioè $P' > P$ incondizionatamente.

La trovata condizione $(15)_b$, debitamente sviluppata coll'aiuto della formola $(14)_a$, conduce all'equazione

$$\int \left[\left(\frac{d(V_0+V)}{da} + \frac{d\psi}{dm_a} \right) m_a' + \left(\frac{d(V_0+V)}{db} + \frac{d\psi}{dm_b} \right) m_b' + \left(\frac{d(V_0+V)}{dc} + \frac{d\psi}{dm_c} \right) m_c' \right] dS = 0,$$

la quale non può sussistere, qualunque sieno le funzioni varianti m_a', m_b', m_c', se non sussistono, in ogni punto dello spazio indotto S, le equazioni:

$$(16) \qquad \begin{cases} \dfrac{d(V_0+V)}{da} + \dfrac{d\psi}{dm_a} = 0, \\ \dfrac{d(V_0+V)}{db} + \dfrac{d\psi}{dm_b} = 0, \\ \dfrac{d(V_0+V)}{dc} + \dfrac{d\psi}{dm_c} = 0, \end{cases}$$

e queste sono le cercate *equazioni dell' induzione magnetica.*

Se queste equazioni si moltiplicano ordinatamente per m_a, m_b, m_c, poscia si sommano e del risultato si prende l'integrale esteso a tutto lo spazio S, si ottiene un'equazione la quale non è evidentemente altro che la $(15)_b$, fatto $V' = V$, cioè

$$P(V_0 + V, V) = 0,$$

che è quanto dire

$$(16)_a \qquad P(V_0, V) + 2P(V) = 0.$$

Di qui risulta, in primo luogo, che se fosse $V_0 = 0$ si dovrebbe avere $P(V) = 0$, equazione la quale (§ 12) non può veri-

ficarsi che per

$$m_a = m_b = m_c = V = 0 \text{ dovunque}.$$

Ciò dimostra il teorema che le equazioni d'induzione non ammettono mai se non una soluzione unica; giacchè è chiaro che la differenza di due soluzioni, se una tal differenza potesse esistere, dovrebbe soddisfare (16) alle stesse equazioni che la funzione V per $V_0 = 0$. Questa dimostrazione verrà però richiamata in seguito (§ 15), per essere nuovamente discussa in confronto con un'altra deduzione del teorema d'unicità.

In secondo luogo è da notarsi che dalle due equazioni (15), $(16)_a$ risulta:

$$(16)_b \qquad P = P(V_0) - P(V),$$

relazione da cui seguono due proprietà degne di menzione. L'una è che si ha sempre

$$P(V) < P(V_0),$$

perchè P è quantità sempre maggiore di zero; l'altra è che P(V) può considerarsi come l'espressione del lavoro che si dovrebbe spendere per trasportare lentamente il corpo indotto S dal suo posto attuale a distanza infinita, in presenza del corpo inducente S_0; o, viceversa, del lavoro che il detto corpo potrebbe compiere, venendo dall'infinito a collocarsi nel suo posto attuale [1]).

Se m', V' rappresentano la distribuzione indotta e la relativa funzione potenziale, nel supposto che il corpo S venga sottratto all'azione dell'inducente S_0, ed esposto a quella d'un altro inducente S_0' di funzione potenziale V_0', si hanno ad un tempo $(15)_b$ le due equazioni

$$P(V_0 + V, V') = 0, \quad P(V_0' + V', V) = 0,$$

1) In virtù della relazione $(16)_a$ questo risultato è in accordo con uno degli importanti teoremi recentemente stabiliti da C. Neumann nella Memoria già citata alla fine del § 10 (cfr. il teorema a p. 127 della Memoria di Neumann). Del resto la ricordata relazione $(16)_a$ non differisce, in sostanza, da quella segnata (3) nella mia Memoria del 1884, ov'essa era stata dedotta da considerazioni d'altro genere.

donde segue

$$P(V_0 + V, V') = P(V_0' + V', V),$$

o, più semplicemente,

$$P(V_0, V') = P(V_0', V),$$

cioè, in forma esplicità,

$$(16_c) \quad \int\left(\frac{dV_0}{da} m_a' + \frac{dV_0}{db} m_b' + \frac{dV_0}{dc} m_c'\right) dS = \int\left(\frac{dV_0'}{da} m_a + \frac{dV_0'}{db} m_b + \frac{dV_0'}{dc} m_c\right) dS.$$

Quest'equazione contiene l'importante *teorema di reciprocità,* stabilito per la prima volta da Kirchhoff rispetto ai corpi isotropi. Non occorre qui insistere sulle utili applicazioni di tale teorema, che trovansi esposte nella già citata Memoria *Sull' induzione magnetica* e che, insieme a molte altre considerazioni più o meno speciali, escono dal quadro del presente lavoro.

È utile invece ricordare che la qui ammessa ipotesi circa la quadraticità della funzione ψ conduce di necessità alla conclusione, non confermata dall'esperienza, che variando in un rapporto costante i momenti del corpo inducente, debbano variare nello stesso rapporto anche quelli del corpo indotto. Si vedrà nel § 17 come, senza uscire dai caratteri generali imposti alla detta funzione dalle considerazioni del § 12, si possa modificarne la forma in guisa da avvicinarsi meglio ai risultati indicati dall'osservazione. L'ipotesi quadratica resta però sempre applicabile alle induzioni di moderata intensità e, come tale, e per le sue proprietà peculiari, possiede un'importanza preponderante rispetto alla teoria generale della polarizzazione.

§ 14. La terna d'equazioni (16) contiene in sè tutto il problema dell'induzione magnetica, ma non ne lascia chiaramente rilevare la natura analitica, poichè le quattro funzioni incognite m_a, m_b, m_c, V sono fra loro legate da una relazione *integrale,* cioè dalla (3). Per ridurre il problema a termini più espliciti occorre una trasformazione, che è la seguente.

Si ponga

$$V_0 + V = U \tag{17}$$

e si concepiscano risolute le equazioni (16), cioè le

$$\frac{d\psi}{dm_a} = -\frac{dU}{da}, \quad \frac{d\psi}{dm_b} = -\frac{dU}{db}, \quad \frac{d\psi}{dm_c} = -\frac{dU}{dc},$$

rispetto alle componenti m_a, m_b, m_c, di cui i primi membri sono funzioni lineari ed omogenee. Le soluzioni hanno la forma:

$$(17)_a \qquad m_x = -\Psi'\left(\frac{dU}{dx}\right), \quad m_y = -\Psi'\left(\frac{dU}{dy}\right), \quad m_z = -\Psi'\left(\frac{dU}{dz}\right),$$

dove Ψ è la funzione quadratica *reciproca* di ψ, formata coi tre argomenti

$$\frac{dU}{dx}, \quad \frac{dU}{dy}, \quad \frac{dU}{dz},$$

funzione che si potrà, se giovi, designare più distintamente con $\Psi(U)$. Si sono sostituite le coordinate x, y, z alle a, b, c perchè, a differenza delle equazioni (16), che sussistono solamente entro lo spazio S le nuove equazioni $(17)_a$ si possono e debbono considerare come valide *in tutto lo spazio.* Basta per ciò, in armonia con una convenzione già fatta al principio del § 8, attribuire ai coefficienti della quadratica Ψ il valor *zero* in tutto lo spazio esterno al corpo indotto S.

Sostituendo le espressioni di m_x, m_y, m_z, date da queste equazioni $(17)_a$, nei secondi membri delle $(8)_a$, si ottiene (17)

$$G_x = \frac{dV_0}{dx} - \left[\frac{dU}{dx} + 4\pi\,\Psi'\left(\frac{dU}{dx}\right)\right], \text{ etc.}$$

ossia

$$(17)_b \qquad G_x = \frac{dV_0}{dx} - \Phi'\left(\frac{dU}{dx}\right), \qquad G_y = \frac{dV_0}{dy} - \Phi'\left(\frac{dU}{dy}\right),$$

$$G_z = \frac{dV_0}{dz} - \Phi'\left(\frac{dU}{dz}\right),$$

dove Φ, ovvero $\Phi(U)$, è una nuova funzione quadratica ed omogenea, formata cogli stessi argomenti di Ψ, e legata con questa dalla relazione

$$(18) \qquad \Phi(U) = \frac{\Delta_1 U}{2} + 4\pi \Psi(U) .$$

Sostituendo finalmente le precedenti espressioni $(17)_b$ di G_x, G_y, G_z nelle due equazioni $(8)_b$, caratteristiche delle forze polari, si ottiene

$$(18)_a \qquad \nabla U = \Delta_2 V_0 ,$$

$$(18)_b \qquad D_n U + D_{n'} U = \frac{dV_0}{dn} + \frac{dV_0}{dn'} ,$$

dove per brevità si è posto:

$$(18)_c \begin{cases} \nabla U = \frac{d}{dx} \Phi' \left(\frac{dU}{dx}\right) + \frac{d}{dy} \Phi' \left(\frac{dU}{dy}\right) + \frac{d}{dz} \Phi' \left(\frac{dU}{dz}\right), \\ D_n U = \Phi' \left(\frac{dU}{dx}\right) \frac{dx}{dn} + \Phi' \left(\frac{dU}{dy}\right) \frac{dy}{dn} + \Phi' \left(\frac{dU}{dz}\right) \frac{dz}{dn} . \end{cases}$$

È da avvertire, rispetto a quest' ultima segnatura, che nel calcolare il valore di $D_n U$ bisogna sempre far uso di quelle espressioni, così di U come di Φ (funzione i cui coefficienti possono, come quelli di Ψ, essere discontinui lungo certe superficie, e *debbono* in ogni caso considerarsi come tali lungo le superficie terminali), che si riferiscono *alla regione verso la quale si dirige la normale n;* cosicchè, per esempio, quando si tratti dei punti di una superficie terminale di S, si deve porre per essi

$$\Phi = \frac{\Delta_1 U}{2} , \quad \text{e quindi} \quad D_n' U = \frac{dU}{dn'}$$

se n' è ritenuta essere la direzione della normale *esterna.*

Delle due equazioni in U $(18)_{a,b}$ la prima è valida *in tutto lo spazio,* la seconda *nei punti d'ogni superficie di discontinuità* (a rigore, nei punti di qualunque superficie), cioè tanto nei punti

di σ quanto in quelli di σ_0 (superficie di discontinuità e terminali di S_0). Queste equazioni $(18)_{a,b}$ si possono considerare come il risultato dell'eliminazione di m_a, m_b, m_c fra le (16).

Per tal modo la soluzione del problema d'induzione viene a dipendere dalla determinazione d'un'unica funzione U monodroma, continua e finita (per la sua definizione (17)), la quale deve possedere i requisiti seguenti:

I. Di soddisfare in tutto lo spazio all'equazione $(18)_a$;

II. Di avere le derivate prime continue e finite in tutto lo spazio, tranne nei punti delle superficie di discontinuità, dove dev'essere soddisfatta l'equazione $(18)_b$;

III. Di diportarsi all'infinito come una funzione potenziale di masse situate nel finito.

Infatti, nota che sia una tal funzione U, le equazioni $(17)_a$ fanno conoscere senz'altro la distribuzione indotta m, mentre la (17) fa conoscere la funzione potenziale V di questa distribuzione.

Le precedenti condizioni I, II, III sono *caratteristiche*, cioè non possono essere soddisfatte da due distinte funzioni U', U". Infatti la differenza U di queste due supposte soluzioni, oltre che alle altre condizioni generali, dovrebbe soddisfare, come facilmente si riconosce, alle due equazioni in cui si convertono le $(18)_{a,b}$ per $V_0 = 0$. Ora dalle equazioni $(17)_b$, moltiplicate ordinatamente per le derivate di U e sommate, si deduce, con una integrazione su tutto lo spazio e con riguardo al teorema generale (9),

$$(18)_d \qquad \int \Phi(U)\, dS_\infty - 2\pi P(V_0, U) = 0,$$

donde, per $V_0 = 0$,

$$(18)_e \qquad \int \Phi(U)\, dS_\infty = 0.$$

Ma la funzione quadratica $\Phi(U)$ è, per le ipotesi fatte sulla ψ e quindi anche sulla $\Psi(U)$, essenzialmente positiva in tutto lo spazio: quindi quest'ultima equazione non può essere soddisfatta che da $U = 0$ dovunque; e ciò esclude ogni possibile differenza fra le due soluzioni supposte distinte.

Così anche per questa via è stabilita l'unicità di soluzione del problema d'induzione.

SULLA TEORICA DEI MOTI VORTICOSI NEI FLUIDI INCOMPRESSIBILI; TESI DI LAUREA DI CORNELIA FABRI, PUBBLICATA NEGLI ANNALI DELLA R. SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA [1]).

Sunto fatto dall' Autrice.

Laonde anche quando m è un numero pari lo spostamento $\delta x, \delta y, \delta z$ può considerarsi risultante di tre spostamenti $\delta u_1, \delta v_1, \delta w_1$; $\delta u_2, \delta v_2, \delta w_2$; $\delta u_3, \delta v_3, \delta w_3$ le componenti dei quali sono

$$\delta u_1 = \Sigma \frac{(2n+2)!}{(s-1)!\,f!\,g!} \mathrm{H}_{s,f,g}\, x^{s-1} y^f z^g$$

$$\delta v_1 = \Sigma \frac{(2n+2)!}{s!\,(f-1)!\,g!} \mathrm{H}_{s,f,g}\, x^s y^{f-1} z^g$$

$$\delta w_1 = \Sigma \frac{(2n+2)!}{s!\,f!\,(g-1)!} \mathrm{H}_{s,f,g}\, x^s y^f z^{g-1}$$

$$\delta u_2 = (-1)^n (x^2+y^2+z^2)^n [-p_{2n+2}(y^2+z^2) + (q_{2n+2}y + r_{2n+2}z)x]$$

$$\delta v_2 = (-1)^n (x^2+y^2+z^2)^n [-q_{2n+2}(z^2+x^2) + (r_{2n+2}z + p_{2n+2}x)y]$$

$$\delta w_2 = (-1)^n (x^2+y^2+z^2)^n [-r_{2n+2}(x^2+y^2) + (p_{2n+2}x + q_{2n+2}y)z]$$

$$\delta u_3 = \Sigma \mathrm{A}_{a,b,c}\, x^a y^b z^c$$

$$\delta v_3 = \Sigma \mathrm{B}_{a,b,c}\, x^a y^b z^c$$

$$\delta w_3 = \Sigma \mathrm{C}_{a,b,c}\, x^a y^b z^c .$$

Lo spostamento $\delta u_1, \delta v_1, \delta w_1$ ammette un potenziale

$$\phi = \frac{1}{2n+3} \Sigma \frac{(2n+3)!}{l!\,f!\,g!} \mathrm{H}_{l,f,g}\, x^l y^f z^g ,$$

perchè si ha

$$\delta u_1 = \frac{\delta\phi}{dx}, \; \delta v_1 = \frac{\delta\phi}{dy}, \; \delta w_1 = \frac{\delta\phi}{dz} .$$

L'altro spostamento $\delta u_2, \delta v_2, \delta w_2$ avviene nel piano definito dalla retta di equazioni

$$\text{(13)} \qquad \frac{x}{p_{2n+2}} = \frac{y}{q_{2n+2}} = \frac{z}{r_{2n+2}}$$

1) *Continuazione* e *fine*. V. pag. 135.

e dal raggio vettore che va all' origine delle coordinate; la direzione poi dello spostamento è normale a questo raggio. Se infatti si denota con p la normale al piano suddetto si ha

$$\delta x \cos(\widehat{p\,x}) + \delta y \cos(\widehat{p\,y}) + \delta z \cos(\widehat{p\,z}) = 0$$

$$x \,.\, \delta x + y \,.\, \delta y + z \,.\, \delta z = 0 \,.$$

Tale spostamento si dirà una flessione di ordine $2n+2$ intorno alla retta (13) e si prenderà per misura della flessione il parametro $\sqrt{p^2_{2n+2} + q^2_{2n+2} + r^2_{2n+2}}$ che misura il rapporto, costante per tutti i punti del mezzo, dello spostamento subìto da ogni punto nella direzione della retta (13) al prodotto del quadrato della sua distanza da questa retta per la potenza $2\,n^{\text{esima}}$ della distanza del punto dalla origine delle coordinate. La retta (13) si dirà *asse di flessione*, l' origine delle coordinate *centro di flessione.*

In modo simile a quello adoperato per le rotazioni di ordine qualunque, può dimostrarsi che anche le flessioni dello stesso ordine, intorno a rette che passano per un medesimo punto, e che hanno i rispettivi centri di flessione coincidenti in quel punto, sono quantità le quali, quando si rappresentino con segmenti che passino pel centro di flessione, che abbiano la direzione dell' asse di flessione ed una lunghezza misurata dalla costante di flessione, possono comporsi colla regola del parallelogrammo.

Analogamente a quanto è stato esposto per le rotazioni di ordine qualunque, si può, ancora per le flessioni, ricercare in quali linee si trasformano i circoli situati in piani normali all' asse e col centro su di esso, non che le rette che incontrano l' asse; e qui pure, in modo assai semplice, si trova che queste rette si deformano in linee piane, e quei circoli in altri concentrici sullo stesso piano.

Anche in questo caso poi, come facilmente può verificarsi, la deformazione δu_3, δv_3, δw_3 non è rappresentabile da vettori.

§ II.

Ora mi propongo di applicare i risultati ottenuti nel § precedente allo studio del moto di una particella di fluido, cioè di una porzione estremamente piccola σ di esso.

Siano x, y, z le coordinate di un punto interno qualsiasi della porzione σ di fluido; e δx, δy, δz le componenti dello spostamento infinitamente piccolo da esso subito nell' intervallo di tempo dt. Se si suppongono δx, δy, δz funzioni finite e continue di x, y, z insieme alle loro derivate di qualsiasi ordine, le componenti dello spostamento di un altro punto qualunque della particella stessa di coordinate $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, all' infuori di infinitesimi di ordine superiore ad m, saranno:

$$\delta x_1 = \delta x + d\,\delta x + \frac{1}{2}\,d^2\,\delta x + \ldots\ldots + \frac{1}{m!}\,d^m\,\delta x$$

$$\delta y_1 = \delta y + d\,\delta y + \frac{1}{2}\,d^2\,\delta y + \ldots\ldots + \frac{1}{m!}\,d^m\,\delta y$$

$$\delta z_1 = \delta z + d\,\delta z + \frac{1}{2}\,d^2\,\delta z + \ldots\ldots + \frac{1}{m!}\,d^m\,\delta z$$

e se si trasporta l'origine delle coordinate nel punto x, y, z e si pone $\Delta x = X$, $\Delta y = Y$, $\Delta z = Z$, le componenti dello spostamento di un punto qualunque X, Y, Z della particella fluida considerata, verranno espresse colla somma di una funzione di primo grado di X, Y, Z e di $(m - 1)$ funzioni omogenee di 2°, 3° 4° . . . . . m^{esimo} grado delle medesime coordinate, laonde, il moto di una particella fluida qualunque potrà considerarsi composto di 3 m moti elementari, cioè, di una traslazione, di m deformazioni di 1°, 2°, 3° . . . . m^{esimo} grado con potenziale di moto, di $m - 1$ moti non rappresentabili da vettori e di altri m movimenti che sono rotazioni o flessioni di ordine superiore, secondo che le loro componenti provengono dai termini nei quali m è dispari o è pari.

Eseguita la decomposizione dei coefficienti delle funzioni

$$\frac{1}{m!}\,d^m\,\delta x\,, \quad \frac{1}{m!}\,d^m\,\delta y\,, \quad \frac{1}{m!}\,d^m\,\delta z$$

nel modo indicato al § precedente per le U, V, W, facendo però precedere dal segno d i coefficienti, allora indicati colle lettere p, q, r, H, A, B, C, per denotare che si tratta di deformazioni infinitamente piccole, e indicando con u, v, w le componenti della velocità, ossia ponendo

$$\delta x = u\,dt \qquad \delta y = v\,dt \qquad \delta z = w\,dt$$

si ha, per le (7) (12) del § precedente,

$$(14)\begin{cases}\dfrac{dp_{2n+1}}{dt}=\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!\,D_{2n+1}}\Sigma\mu_{h,k,l}\left[\dfrac{d^{2n+1}v}{dx^{2h}dy^{2k}dz^{2l+1}}-\dfrac{d^{2n+1}w}{dx^{2h}dy^{2k+1}dz^{2l}}\right]\\[2ex]\dfrac{dq_{2n+1}}{dt}=\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!\,D_{2n+1}}\Sigma\mu_{h,k,l}\left[\dfrac{d^{2n+1}w}{dx^{2h+1}dy^{2k}dz^{2l}}-\dfrac{d^{2n+1}u}{dx^{2h}dy^{2k}dz^{2l+1}}\right]\\[2ex]\dfrac{dr_{2n+1}}{dt}=\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!\,D_{2n+1}}\Sigma\mu_{h,k,l}\left[\dfrac{d^{2n+1}u}{dx^{2h}dy^{2k+1}dz^{2l}}-\dfrac{d^{2n+1}v}{dx^{2h+1}dy^{2k}dz^{2l}}\right]\end{cases}$$

$$(15)\begin{cases}\dfrac{dp_{2n+2}}{dt}=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!\,D_{2n+2}}\Sigma\mu_{h,k,l}\\\quad\left[\dfrac{d^{2n+2}u}{dx^{2h}dy^{2k+2}dz^{2l}}-\dfrac{d^{2n+2}w}{dx^{2h+1}dy^{2k}dz^{2l+1}}-\dfrac{d^{2n+2}v}{dx^{2h+1}dy^{2k+1}dz^{2l}}\right.\\\qquad\left.+\dfrac{d^{2n+2}u}{dx^{2h}dy^{2k}dz^{2l+2}}\right]\\[2ex]\dfrac{dq_{2n+2}}{dt}=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!\,D_{2n+2}}\Sigma\mu_{h,k,l}\\\quad\left[\dfrac{d^{2n+2}v}{dx^{2h}dy^{2k}dz^{2l+2}}-\dfrac{d^{2n+2}u}{dx^{2h+1}dy^{2k+1}dz^{2l}}-\dfrac{d^{2n+2}w}{dx^{2h}dy^{2k+1}dz^{2l+1}}\right.\\\qquad\left.+\dfrac{d^{2n+2}v}{dx^{2h+2}dy^{2k}dz^{2l}}\right]\\[2ex]\dfrac{dr_{2n+2}}{dt}=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!\,D_{2n+2}}\Sigma\mu_{h,k,l}\\\quad\left[\dfrac{d^{2n+2}w}{dx^{2h+2}dy^{2k}dz^{2l}}-\dfrac{d^{2n+2}v}{dx^{2h}dy^{2k+1}dz^{2l+1}}-\dfrac{d^{2n+2}u}{dx^{2h+1}dy^{2k}dz^{2l+1}}\right.\\\qquad\left.+\dfrac{d^{2n+2}w}{dx^{2h}dy^{2k+2}dz^{2l}}\right]\end{cases}$$

Posto poi

$$\frac{dp_m}{dt} = \vartheta_m \quad \frac{dq_m}{dt} = \chi_m \quad \frac{dr_m}{dt} = \rho_m ,$$

e

$$\vartheta_0 = u \qquad \chi_0 = v \qquad \rho_0 = w$$

dalle precedenti relazioni si ricava, qualunque sia m, purchè diverso da zero

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d\vartheta_m}{dx} + \frac{d\chi_m}{dy} + \frac{d\rho_m}{dz} = 0 \\ & \vartheta_m = \frac{D_{m-1}}{m\, d_m} \left(\frac{d\chi_{m-1}}{dz} - \frac{d\rho_{m-1}}{dy} \right) \\ & \chi_m = \frac{D_{m-1}}{m\, d_m} \left(\frac{d\rho_{m-1}}{dx} - \frac{d\vartheta_{m-1}}{dz} \right) \\ & \rho_m = \frac{D_{m-1}}{m\, d_m} \left(\frac{d\vartheta_{m-1}}{dy} - \frac{d\chi_{m-1}}{dx} \right) \end{aligned} \right.$$

e se la prima di queste relazioni, o quelle che da essa in seguito si dedurranno, si suppongono soddisfatte anche nel caso di $m = 0$, verrà necessariamente ad introdursi la condizione che il fluido non sia compressibile.

La prima delle relazioni (16) risulta evidente dalle (14) (15) ed è pur non molto difficile verificare l'esattezza delle altre.

Le quantità $\vartheta_{2n+1}, \chi_{2n+1}, \rho_{2n+1}$; $\vartheta_{2n}, \chi_{2n}, \rho_{2n}$, costanti, in ogni istante, per tutti i punti di una stessa particella fluida, si diranno essere rispettivamente, le componenti della velocità di rotazione di ordine $2n+1$ e quelle della velocità di flessione di ordine $2n$.

In seguito, per rendere più semplice il linguaggio, denominerò, moto vorticoso di ordine $2n$, la flessione di ordine $2n$ e, moto vorticoso di ordine $2n+1$, la rotazione di ordine $2n+1$; nelle ricerche che mi propongo di esporre, ciò non può far nascere alcun equivoco, perchè i moti vorticosi di ordine m, che io dovrò considerare, saranno sempre moti rotatorii se m è dispari, moti di flessione se m è pari.

Dalle (6) e (7) si deduce ancora

$$\vartheta_m = -\frac{D_{m-2}}{m(m-1)d_m}\Delta^2\vartheta_{m-2}$$

$$(17) \qquad = (-1)^s \frac{D_{m-2s}}{d_m}\frac{(m-2s)!}{m!}\Delta^{2(s)}\vartheta_{m-2s}$$

e le analoghe rispetto a χ_m e ρ_m, nelle quali formule il simbolo $\Delta^{2(s)}$ denota che l'operazione, ordinariamente indicata col simbolo Δ^2, deve essere eseguita successivamente per s volte. Ponendo nelle (17) $m = 2n$, $s = n - 1$ ed $m = 2n + 1$, $s = n$ si ottengono le relazioni che collegano i parametri dei movimenti considerati da Boggio-Lera e da Helmholtz con quelli ora presi a studiare.

Le formole, fin qui stabilite, servono a determinare il moto vorticoso di un dato ordine in funzione dei moti vorticosi di ordine inferiore e delle loro derivate. Il problema inverso, cioè la determinazione del moto vorticoso di un dato ordine, mediante i moti vorticosi di ordine superiore e le loro derivate, si risolve immediatamente, in modo analogo a quello adoperato da Boggio-Lera per determinare la velocità effettiva del fluido in funzione della flessione, servendosi del teorema di Green. Si giunge così, assai facilmente, alla dimostrazione dei seguenti teoremi:

1.° Il moto vorticoso di qualsiasi ordine m è determinato, in ogni punto interno ad una superficie che racchiude uno spazio S comunque connesso, quando è noto uno dei moti di ordine superiore $m + 2s$ nello spazio S ed i moti di ordine m, $m + 2$, $m + 4$ ..... $m + 2(s - 1)$ al contorno.

2.° Se in un determinato istante tutti i punti del fluido situato nello spazio S non hanno moto vorticoso di ordine $m + 2s$ e quelli situati al suo contorno sono privi dei moti vorticosi di ordine m, $m + 2$ ..... $m + 2(s - 1)$, nello spazio S non potrà esservi alcuna particella che abbia moto vorticoso di ordine m.

3.° Se nello spazio S le funzioni ϑ_m, χ_m, ρ_m sono le derivate rispetto ad x, y, z di una stessa funzione ϕ, cioè se esiste un potenziale pel moto vorticoso di ordine m [1]) allora il moto

1) La funzione ϕ dovrà evidentemente soddisfare entro S l'equazione $\Delta^2\phi = 0$.

vorticoso di questo ordine è determinato in ogni punto interno dello spazio S, quando si conoscono in ogni istante, le componenti secondo la normale al suo contorno, dei moti vorticosi di ordine m che hanno le particelle situate su quel contorno. Se in ogni punto della superficie, che limita lo spazio S, la derivata di ϕ rispetto alla normale è zero, nell'interno di S non potrà esservi moto vorticoso di ordine m.

La stretta relazione che i movimenti di Rowland hanno col moto vorticoso di Helmholtz, mi ha indotto a ricercare se per essi sussistono teoremi analoghi a quelli trovati da Helmholtz e Beltrami pei moti vorticosi di 1.° ordine, ed ho potuto facilmente verificare che tutte quelle proprietà dei moti vorticosi di 1° ordine che Helmholtz deduce da ciò che egli chiama integrali rapporto allo spazio, hanno le loro corrispondenti nei moti vorticosi di ordine superiore. Ciò dipende dal fatto che nella dimostrazione di quei teoremi si fa uso soltanto delle relazioni che collegano le componenti della velocità con quelle della rotazione, le quali relazioni sono perfettamente simili a quelle che passano fra i parametri che individuano due movimenti di Rowland di ordine consecutivo.

Al contrario, non ho potuto estendere ai moti di Rowland i teoremi che Helmholtz deduce da ciò che chiama integrali rapporto al tempo la cui base è l'importante principio della conservazione delle rotazioni.

DI UN FENOMENO PERTURBATORE CHE SI MANIFESTA NELLA PROPAGAZIONE DEL FLUSSO MAGNETICO TEMPORARIO; NOTA DI G. PISATI.

« 1. Nella III. tabella numerica della mia Nota precedente [1]) ho esposto i risultati di parecchie serie di osservazioni fatte con forze magnetizzanti molto differenti fra di loro ed usando strumenti di misura assai più precisi e sensibili di quelli che avevano servito nelle esperienze preliminari [2]): or bene, nel cercare se la formula:

$$(1) \qquad G = G_0 e^{-cd} ,$$

che si deduce facilmente dall' espressione generale

$$Q = C e^{-cx}$$

fosse soddisfatta da quelle osservazioni, mi sono accorto dell' esistenza d' un certo fenomeno secondario, che perturba sensibilmente la legge fondamentale del flusso. Lo studio di questo fenomeno mi è sembrato indispensabile per più ragioni, ed ora parmi che alcuni risultati ai quali sono giunto, sebbene ancora incompleti, presentino già qualche interesse perchè non solo valgono a giustificare le differenze tra i valori osservati e quelli calcolati colla formula (1), ma, ciò che più importa, possono fors' anche servire a dare un' idea sul modo con cui nel conduttore magnetico penetrano le linee di forza proprie della corrente eccitatrice.

2. Considerando le osservazioni fatte con una stessa forza magnetizzante se la (1) fosse ad esse applicabile, dovrebbe risultare.

$$\frac{G_n}{G_{n+1}} = e^c = \text{costante} .$$

Invece si trova che il rapporto tra due osservazioni consecutive G_n e G_{n+1} presenta un andamento ondulatorio, nel quale i massimi si succedono con una certa regolarità che è quasi la stessa per tutte le correnti, come si può rilevare dando uno sguardo alla seguente tabella IV, che contiene appunto i valori di e^c ed in cui sono segnati con asterisco i principali massimi.

1) Vedi *Rendiconti della R. Accademia de' Lincei*, seduta del 2 Marzo 1890, e *Nuovo Cimento*, fasc. 3 e 4, 1892.

2) *Ibid.*, seduta del 2 Febbraio 1890.

TABELLA IV.

Valori di e^c

$i = 0{,}16$	0,14	0,12	0,10	0,08	0,06	0,04	0,02
$e^c = 1{,}225$	1,223	1,234	1,249	1,324	1,282	1,324	1,328
240	243	242	265	249	286	314	392*
260	264	272	261	282	317	378*	344
275	276	275	291	319	332	321	274
278	288	299	294	296	329	324	377
302 *	300*	307*	317*	355*	370*	370*	432*
284	286	273	270	262	263	301	321
292 *	291*	316*	347*	362*	379*	339*	273
275	260	234	232	235	204	216	—
260	271	322*	330*	298*	321*	—	—
296 *	286*	241	229	248	258	—	—
240	244	258	275*	250	240	—	—
324 *	314*	292*	263	333*	351*	—	—
203	234	263	267	260	194	—	—
281	261	—	—	—	—	—	—

In seguito ad un esame molto minuzioso di tutte le condizioni in cui vennero eseguite le esperienze e dopo un' accurata revisione delle costruzioni grafiche dalle quali si cavarono i valori della tabella III, mi sono convinto che la variabilità dei valori di e^c in una stessa serie di osservazioni non si può assegnare ad errori sistematici dipendenti dai metodi e dagli strumenti usati nelle esperienze: mi resta soltanto qualche dubbio circa la piccola correzione γ. che forse non va fatta; ed invero omettendola i risultati migliorano un pochino, ma non abbastanza da modificare in misura apprezzabile l' andamento ondulatorio. Senza dubbio le ultime ondulazioni di ciascuna serie si possono spiegare, se non totalmente, almeno in buona parte attribuendole ad errori di osservazione; ma lo stesso non si può dire affatto delle prime. Si deve pertanto ammettere l' esistenza d' una causa di natura costante che modifica la propagazione del flusso.

3. Allo scopo di determinare tale causa perturbatrice, e di trovare se fosse possibile il modo di eliminarla, ho istituito un gran numero d' esperienze in condizioni svariatissime e da esse ho potuto dedurre che la perturbazione proviene dalla complessa

costituzione dell' elica eccitatrice: pare invece che la forma e le dimensioni dell' elica secondaria non abbiano influenza sensibile.

I tentativi che di poi feci per eliminare dalle esperienze la causa perturbatrice diedero risultati poco sodisfacenti: sono riuscito ad affievolirla alquanto, ma forse sono ancora molto lontano dal poterne rendere insensibile l'influenza: più agevole invece mi è stato di esagerarla, il che ottenni adoperando del ferro ben ricotto e variando la forma dell' elica primaria fino a ridurla ad una spirale piana. Non riferirò qui tutti i risultati delle numerose serie di osservazioni istituite in proposito, dirò soltanto di quelli ottenuti nelle ultime esperienze che feci con un fascio di 30 fili di ferro ed adoperando una spirale piana di 35 giri percorsa dalla corrente eccitatrice $i = 0{,}075$ C. G. S.

I risultati delle osservazioni sono raccolti nel seguente quadro, in cui x è la distanza in centimetri dal centro della spirale eccitatrice al centro dell' elica indotta e G la lettura fatta al galvanometro balistico trascurando la correzione γ: se si tiene conto anche di questa correzione l' andamento dei valori di e^c non risulta sostanzialmente alterato, anzi le ondulazioni riescono un po' più accentuate.

x	G	e^c	x	G	e^c
3	189,3	1,190	14	27,50	1,185
4	159,0	197	15	23,22	179
5	132,8	199	16	19,69	175
6	110,8	200*	17	16,76	170
7	92,3	198	18	14,32	160
8	77,1	193	19	12,35	159
9	64,6	189	20	10,66	159
10	54,35	179	21	9,20	163*
11	46,10	183	22	7,91	153
12	39,00	188	23	6,86	151
13	32,80	192*	24	5,96	138
14	27,50		25	5,24	

L'andamento di e^c è rappresentato da una curva ondulata [1]) che ha tre massimi ben distinti in corrispondenza presso a poco alle ascisse 6,5; 13,5; 21,4.

4. Dimostrata l'esistenza del fenomeno perturbatore rimarrebbe a trovarne la spiegazione. A me pare che il flusso magnetico temporario sia costituito, almeno in buona parte, dalle linee di forza proprie della corrente primaria: queste linee attratte dal ferro penetrerebbero in esso alcune nella regione coperta dall'elica eccitatrice ed altre nelle regioni scoperte, dando luogo a contrazioni analoghe a quelle che si osservano nelle vene fluide di materia ponderabile. Ma quand'anche non si credesse di accettare questa spiegazione, che a me sembra molto probabile, è evidente che se si vuole verificare la legge fondamentale della propagazione del flusso, bisogna affievolire più che sia possibile il fenomeno secondario semplificando la costituzione dell'elica eccitatrice [2]) e non considerare le variazioni del flusso nella regione prossima allo sbocco dell'elica, dove appunto più intensamente si manifesta la perturbazione.

Vediamo infatti, prima tenendo conto di tutte le osservazioni e poscia escludendo le prime tre di ciascuna serie, in quale misura il fenomeno secondario modifica la propagazione del flusso, od in altre parole quali scostamenti si verificano nei risultati della tabella III rispetto alla legge espressa dalla formula:

$$G = G_0 e^{-cd}. \tag{1}$$

Indicando con m il modulo dei logaritmi comuni e ponendo

$$\text{Log. } G = l$$
$$\text{Log. } G_0 = y$$
$$mc = z$$

dalla (1) si cava l'equazione generatrice

$$y - dz - l = 0 .$$

1) Ragioni tipografiche hanno impedito di riprodurre la curva di cui si parla. — *N.d.R.*

2) In vero fin dal principio di questo mio ricerche avevo avuta l'intenzione di ridurre l'esperienza alla massima semplicità, e precisamente avrei voluto incominciare con un solo circuito circolare eccitatore, un solo circuito indotto e con un sottilissimo filo di ferro, direi quasi una semplice fibra: ma occorreva per ciò un galvanometro balistico molto più sensibile del mio. — *N. d. A.*

Or bene, se coi dati della tabella III si formano per *tutte le osservazioni* le equazioni generate e, tenendo conto dei loro pesi si risolvono col metodo dei minimi quadrati, si ottengono per y e per z tali valori che introdotti nelle equazioni danno (specialmente nel caso delle forti correnti eccitatrici) de' residui v notevolmente maggiori di quelli che si potrebbero presumere dalla precisione delle osservazioni dirette. Ecco ad esempio i risultati ottenuti per le serie delle correnti 0,16 0,10 e 0,04 [1]).

	$i = 0,16$	$i = 0,10$	$i = 0,04$
$d = 0$	$v = -12,8$	$-$ 5,6	$-$ 0,1
1	0,0	+ 0,3	+ 0,2
2	+ 5,5	+ 2,2	+ 0,6
3	+ 5,9	+ 3,5	$-$ 0,4
4	+ 4,2	+ 2,1	$-$ 0,2
5	+ 2,7	+ 1,0	0,0
6	+ 0,1	$-$ 0,7	$-$ 0,3
7	$-$ 0,6	$-$ 0,1	$-$ 0,1
8	$-$ 1,4	$-$ 1,7	$-$ 0,1
9	$-$ 1,2	$-$ 0,4	+ 0,4
10	$-$ 0,7	$-$ 1,0	—
11	$-$ 1,0	$-$ 0,1	—
12	$-$ 0,3	0,0	—
13	$-$ 0,9	+ 0,1	—
14	0,0	+ 0,2	—
15	$-$ 0,1	—	—

Se invece si escludono dal calcolo le prime tre osservazioni di ciascuna serie, si ottengono i residui contenuti nella seguente tabella V, che dà inoltre la forza magnetizzante H nel centro dell'elica primaria ed i valori più probabili di $y = \text{Log. } G_0$ e $z = mc$ ottenuti col metodo dei minimi quadrati.

1) Trattandosi della verificazione d'una legge fondamentale, spero che mi si vorrà perdonare l'abbondanza dei dati di osservazione e quella dei risultati dei calcoli ad essi relativi. — *N. d. A.*

TABELLA V.

Valori dei residui v.

$i =$	0,16	0,14	0,12	0,10	0,08	0,06	0,04	0,02
$H =$	99,50	87,06	74,63	62,19	49,75	37,31	24,88	12,44
$y =$	2,5724	2,5351	2,4842	2,3915	2,2535	2,0510	1,7778	1,3652
$z =$	0,1074	0,1075	0,1093	0,1103	0,1132	0,1154	0,1219	0,1295
d	v	v	v	v	v	v	v	v
3	+0,3	+0,8	0,0	+0,9	+1,6	+1,4	+0,1	—0,2
4	+0,9	+1,1	+1,0	+0,6	+0,2	+0,3	+0,1	+0,3
5	+0,9	+0,3	—0,1	+0,2	+0,2	—0,2	+0,1	+0,1
6	—0,7	—0,9	—1,2	—1,0	—1,4	—1,2	—0,3	—0,2
7	—0,8	—1,1	—0,4	0,0	—0,3	—0,4	—0,1	—0,1
8	—1,1	—1,2	—1,2	—1,4	—1,3	—1,0	—0,1	+0,1
9	—0,6	—0.3	+0,3	0,0	—0,2	0,0	+0,3	—
10	0,0	0,0	—0,3	—0,6	—0,1	—0,1	—	—
11	—0,3	—0,1	+0,4	+0,3	+0,3	+0,1	—	—
12	+0,4	+0,4	+0,6	+0,3	+0,5	+0,4	—	—
13	—0,2	0,0	+0,4	+0,5	+0,2	+0,1	—	—
14	+0,6	+0,4	+0,5	+0,5	+0,3	+0,4	—	—
15	+0,4	+0,4	—	—	—	—	—	—

Si scorge che, per tutte le forze magnetizzanti di cui ho fatto uso, i singoli valori del flusso nelle successive sezioni a cominciare da $d = 3$ sono abbastanza bene rappresentati dalla formula (1). Però dall' insieme dei valori e dal modo con cui si succedono i segni dei residui si manifesta ancora, sebbene molto debole, un' influenza di natura costante dovuta al fenomeno secondario, la quale influenza ci dà la ragione per cui i residui sono un po' maggiori di quelli che si potevano prevedere data la precisione delle singole osservazioni dirette ».

Verificata la legge fondamentale rimangono da determinare i valori dei parametri C e c che entrano nella espressione generale del flusso $Q = Ce^{-cx}$. L' A. osserva a questo riguardo che il coefficiente c si deduce dai valori di $Z = mc$ contenuti nella tabella V,

dalla quale si vede anche che c va diminuendo col crescere della corrente eccitatrice. Quanto all' altro coefficiente C invece non può essere determinato nelle condizioni di queste esperienze per causa del fenomeno perturbatore, ed anche perchè la legge del flusso non è la medesima dentro e fuori dell' elica, come l' A. ha potuto verificare con esperienze dirette. Occorrono dunque per determinarlo completamente altre esperienze in condizioni tali da eliminare o almeno diminuire molto il fenomeno perturbatore. Inoltre l' A. fa osservare che per conoscere più intimamente il fenomeno della propagazione del flusso magnetico temporario non bastano i semplici valori di C e c, ma è necessario di risolvere questi coefficienti nei loro elementi fisici. Guidato dall' idea che la propagazione del flusso magnetico sia un fenomeno analogo alla propagazione del calore nelle verghe, l' A. aveva iniziato degli studi diretti a cercare se sia possibile esprimere C e c in funzione del potenziale, del raggio della verga e di due altri fattori analoghi ai coefficienti di conduttività termica interna ed esterna; ed annunziava già in questa Memoria di essere riuscito a superare parecchie delle difficoltà che presenta il problema. La sua morte ci ha privato dei risultati di queste importantissime ricerche.

SULLE LEGGI PSICOFISICHE DI *FECHNER* E DI *PLATEAU*; NOTA DEL PROF. A. STEFANINI [1]).

Dalle esperienze che feci sulla misura dell'intensità del suono, e dalla discussione delle diverse leggi psicofisiche, che sono state proposte [2]), come dalla discussione delle esperienze che furon fatte dal Merkel per le sensazioni luminose e per quelle di pressione [3]), io concludeva che, probabilmente, la legge proposta da Plateau, ed espressa da

$$E = c\, R^k$$

ove R è l'intensità dell'eccitazione, E l'intensità della sensazione, e c e k sono costanti, prendendo $k = 1/2$ avrebbe potuto servire a rappresentare tutti i resultati ottenuti per le diverse sensazioni fin qui studiate.

In seguito a quei miei studi sopra detti, il Merkel completò le sue ricerche sulla psicofisica studiando le sensazioni sonore [4]); e dalla discussione delle mie e delle sue ricerche egli concluse, che di fatti la formula di Plateau è la più adatta a rappresentare tutti i resultati conosciuti; ma che non si può porre per tutte le sensazioni $k = 1/2$, dovendo invece determinarsi caso per caso il valore più opportuno per l'esponente k; ma egli osservava frattanto che per le sensazioni sonore si dovrebbe porre $k = 1$ e per quelle luminose $k = 1/2$; cioè sarebbe più specialmente per le sensazioni luminose, che varrebbe la legge di Plateau sotto la forma

$$E = c \sqrt{R}$$

da me proposta.

Da tutto ciò, richiamando anche le osservazioni che feci nel mio citato lavoro a proposito delle esperienze eseguite per

1) Dagli *Atti della R. Accad. Lucchese*, Vol. XXVI, pag. 201.
2) *Atti R. Acc. Lucc.* vol. XXV. pag. 305. *N. Cim.* 26, pag. 157, 1889.
3) J. Merkel, Wundt's *Phil. Stud.* V. p. 245, 1888.
4) J. Merkel, Wundt's *Phil. Stud.* V. p. 499, 1889.

stabilire la validità di questa o di quella legge psicofisica, si potrebbe concludere che, per tutte quante le sensazioni fin qui studiate, si dovesse affatto escludere la validità della legge logaritmica del Fechner.

Ora a proposito delle sensazioni luminose il Delboeuf [1]) descrisse un'esperienza, con la quale sembrava che fosse invece dimostrata la validità della sola relazione

$$E = \log \frac{c + R}{c}$$

con $c = {}^1/_2$, e che non è altro che la legge logaritmica del Fechner alquanto modificata; dopo gli ultimi studi del Merkel io mi proposi perciò di applicare il metodo del Delboeuf alla verificazione della legge di Plateau.

Quantunque, per la mancanza degli strumenti necessari, mi sia impossibile completare una tale ricerca, mi sembra che qualche conclusione possa trarsi anche da quanto ho potuto fin qui ottenere a questo proposito.

Il Delboeuf eseguì le sue esperienze sulle sensazioni luminose col metodo dei settori rotanti suggeritogli da Plateau. Egli cominciò col far ruotare attorno a un asse, e su un fondo perfettamente nero, tre settori concentrici *a*, *b*, *c* (fig. 1) e scelti di larghezze tali, che l'intensità luminosa dell'anello prodotto dalla rotazione di *b* fosse intermedia fra quelle degli anelli dovuti ai settori *a* e *c*. In queste esperienze l'intensità dell'eccitazione poteva evidentemente prendersi proporzionale alla larghezza del settore; l'intensità luminosa dell'anello corrispondente era giudicata dall'osservatore, il quale doveva riconoscere se le tinte di quegli anelli erano o no perfettamente

Fig. 1.

1) Delboeuf, *Étude psychophysique; Mém. couronnés de l'Ac. Roy. de Belgique*, vol. XXIII, 1873.

graduate. Quando la graduazione era ottenuta, e si otteneva facendo variare opportunamente la larghezza del settore intermedio, il Delboeuf riconosceva che le larghezze dei tre settori eran prossimamente nel rapporto che si deduceva dalla legge da esso proposta.

Egli fece poi un' altra esperienza, che è quella cui ho accennato; ritagliò cioè un cartone in modo che la figura luminosa ottenuta facendolo ruotare su un fondo nero andasse degradando, in modo continuo e uniforme, dal bianco perfetto per un certo limite interno OA al nero assoluto per un altro limite esterno OD. A tale scopo egli condusse dal centro di rotazione un raggio OD (fig. 2), lo divise in parti uguali e stabilì di contar su di esso le sensazioni in modo che decrescessero uniformemente; l' eccitazione corrispondente a una qualunque di queste sensazioni, corrispondente al punto B, per esempio, sarà misurata dall' arco luminoso BC. Se a partire dal raggio stesso OD, e sempre da una stessa parte, si tracciano gli archi delle eccitazioni relative ai diversi punti di OD, le estremità di tali archi daranno una curva, che si può chiamare *curva delle eccitazioni*.

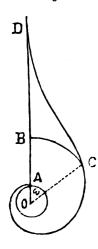



Fig. 2.

Per trovar l' equazione di tal curva, il Delboeuf osserva che nella relazione

$$\text{(1)} \qquad E = \log \frac{c + R}{c}$$

la E è ora una funzione del raggio r che dal centro O va ad un punto qualunque B della OD, e che, per quanto si è convenuto, la E deve decrescere al crescere di r, e l' aumento di r come il decremento di E devono essere in progressione aritmetica, perchè si vuole che la sensazione luminosa decresca uniformemente lungo il raggio OD. Si può dunque porre:

$$E = f(r) = k' - m r,$$

Nel secondo membro della (1) bisogna sostituire ad R l'an-

golo ω che fa con OD la retta che da O va all'estremità C dell'arco di eccitazione BC. La (1) diviene dunque:

$$k' - mr = \log \frac{c + \omega}{c} , \tag{2}$$

e le due costanti k' e m dipendono dai raggi OA del limite interno, e OD del limite esterno; limiti che si posson fissare a volontà.

Ora dalla (2) si ottiene:

$$\omega = ce^{k'} e^{-mr} - c ,$$

che, ponendo $ce^{k'} = k$, diviene:

$$\omega = ke^{-mr} - c \tag{3}$$

Nel cartone ritagliato dal Delboeuf era

$$\omega = 360^{\circ} \text{ per } r = 14 \text{ mm, e}$$

$$\omega = 0^{\circ} \quad \text{»} \quad r = 154 \text{ mm.}$$

Sostituendo questi valori nella (3) e prendendo, come fece per altre considerazioni il Delboeuf, $c = {}^1/_2$, si trovano per le costanti i valori:

$$m = 0{,}47 ; \qquad k = 695{,}7 ;$$

dunque l'equazione cercata della curva è

$$\omega = 695{,}7 \, e^{-0{,}47} \, r - 0{,}5 , \tag{4}$$

nella quale ω è un numero di gradi, ed r è misurato in mm.

Per stabilire la scala delle eccitazioni sarebbe stato più conveniente porre $\omega = 360^{\circ}$ per $r = 0$; ma il Delboeuf fu costretto a prendere $\omega = 360^{\circ}$ per un certo valore finito di r, per poter fissare il cartone sull'asse di rotazione; il cerchio interno di 14 mm. di raggio serviva infatti a fissare il cartone sull'asse ed era poi coperto con un pezzo di velluto nero, talchè il centro della figura luminosa era nero, e poi, a partire da $r = 14$ fino

a $r = 154$ mm. si doveva avere una degradazione continua ed uniforme d'intensità luminosa.

La forma della curva d'eccitazione così ottenuta è rappresentata dalla fig. 2.

Il Delboeuf trovò che la figura luminosa prodotta dalla rotazione di quel cartone sodisfaceva infatti alle condizioni sopra dette; e a maggior conferma della validità della relazione (1) riferisce di aver osservato, che ritagliando un altro cartone con altra curva, in modo che le eccitazioni decrescessero con continuità e proporzionalmente all'accrescimento del raggio OD, si aveva una figura luminosa che decomponevasi in due o tre zone indecise; l'interna grandissima di splendore uniforme, un'altra eccessivamente stretta verso l'orlo e oscurissima, e la terza intermedia, un po' meno stretta e che si confondeva con le altre due.

Quest'ultima esperienza sarebbe, come dice il Delboeuf, una conferma negativa della legge logaritmica del Fechner.

Volendo applicare il metodo del Delboeuf alla verificazione della legge di Plateau, ritagliai anch'io un cartone, ma secondo la curva che si ottiene applicando invece della (1) la formula:

$$E = c\sqrt{R};$$

curva, la cui equazione si ottiene facilmente come appresso.

La (2) del Delboeuf si tramuta, applicando la legge di Plateau, nell'altra:

$$k - mr = \sqrt{\omega} \tag{5}$$

nella quale, continuando a servirsi delle limitazioni poste dal Delboeuf, deve essere

$$\begin{aligned} \omega &= 360^\circ \text{ per } r = 14 \text{ mm} \\ \omega &= 0 \quad \text{»} \quad r = 154 \text{ »} \end{aligned}$$

Portando questi valori successivamente nella (5), si trovano per le costanti m e k i valori

$$\begin{aligned} m &= 0{,}13528 \\ k &= 20{,}833 \end{aligned}$$

onde l' equazione cercata della curva è

$$(6) \qquad \omega = (20{,}833 - 0{,}13528\, r)^2 ,$$

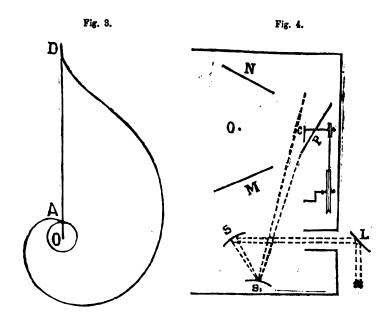
Nella seguente tabella son riportati i valori degli archi ω per diversi valori di r, tanto per la curva del Delboeuf rappresentata dalla (4) quanto per quella che chiamerò di Plateau espressa dalla (5).

r in mm.	ω in gradi	
	DELBOEUF	PLATEAU
144	0°,30	1°,82
134	0,79	7,29
124	1,56	16,40
114	2,79	29,16
104	4,76	45,56
94	7,91	65,61
84	12,96	89,30
74	21,03	116,64
64	33,91	146,45
54	54,57	182,25
44	87,59	220,—
34	140,4	262,44
24	224,9	306,25
14	360,0	360,0

La fig. 3 rappresenta, in proporzione ridotta, la forma della curva di Plateau data dalla (6).

Ritagliati pertanto due cartoncini bianchi, uno secondo la curva del Delboeuf, l' altro secondo quella di Plateau, li adattai successivamente all' asse di una ruota, che si poteva far girare colla velocità di 25 giri al secondo. Interessando che i dischi fossero illuminati uniformemente, e si staccassero su un fondo perfettamente nero, disposi l' apparecchio nella camera oscura del Liceo, e abbassate tutte le tende, per mezzo di un portaluce L (fig. 4) facevo arrivare i raggi su uno specchio concavo S, poi da questo su un altro convesso S_1, disponendo le cose in modo che, per mezzo di opportuni diaframmi neri M, N, P, la luce riflessa da S_1 cadesse soltanto sul cartone C e fosse impedita di arrivare per alcun' altra maniera all' occhio dell' osservatore, posto in O lungo l' asse di rotazione.

Ripetendo le esperienze con illuminazioni d'intensità diverse, adoprando cioè ora la luce solare diretta, rinviata entro la camera oscura mediante lo specchio L, ora quella diffusa dalle nubi ricevuta direttamente dallo specchio S, ebbi modo di costatare che la figura luminosa prodotta dalla rotazione del cartoncino ritagliato secondo la curva di Plateau non la cedeva in

Fig. 3. Fig. 4.

nulla, per uniformità di degradazione nella tinta, a quella ottenuta col cartone del Delboeuf; e anzi mi parve che fosse assai migliore di quest'ultima, la quale si oscurava troppo rapidamente a poca distanza dal centro; talchè non mi sembra che si possa accettare la conclusione del Delboeuf, che cioè ogni altra curva all'infuori di quella corrispondente alla formula da esso proposta, dia luogo a una serie di anelli distinti che si succedono con maggiore o minore continuità nella degradazione delle tinte. La figura luminosa ottenuta colla curva di Plateau non presenta affatto di tali anelli, ed è, a mio giudizio, più uniforme dell'altra.

Alle esperienze del Delboeuf eseguite con alcuni settori

soltanto fu rimproverato di non poter eliminare gli effetti perturbatori del contrasto; e questa causa perturbatrice esiste certamente anche nel caso delle curve continue sopra indicate, se bene debba avere minore influenza; ad ogni modo, agendo essa ugualmente nei due casi, mi sembra che l'esperienza eseguita possa invocarsi per concludere, che se non si può ritener come decisiva conferma della legge di Plateau, si deve almeno riconoscere che la prima esperienza del Delboeuf non può servire a escludere la validità di ogni relazione diversa da quella del Fechner.

Per completare queste ricerche avrei voluto eseguire delle misure fotometriche sulle figure luminose ottenute con le due curve, per giudicare se l'intensità luminosa, misurata col fotometro a diverse distanze dal centro di rotazione, diminuisce o no uniformemente; ma per questo mi sarebbe prima di tutto occorso un fotometro di Glan, e poi avrei dovuto modificare alquanto le disposizioni sperimentali, per potere eseguire comodamente le misure stesse. Questa modificazione l'avrei fatta consistere nel far ruotare un cartone nero davanti a un foglio di carta velina, illuminato direttamente dalla luce diffusa, ritagliando il cartone nero in modo che colla sua rotazione si potesse ottenere lo stesso effetto che si ha dalla rotazione del cartone bianco di Delboeuf o di Plateau sul fondo nero; ma non potendo contare sull'uso del fotometro di Glan, desistei dal fare altre ricerche in questa direzione.

Mi era venuto anche in mente di fissare con la fotografia l'aspetto delle figure luminose ottenute coi due cartoni, per poter poi anche più comodamente eseguire sulle negative le misure fotometriche anzi dette, quando avessi avuto possibilità di servirmi del fotometro Glan; ma non mi fermai molto su questo proposito, perchè mi pareva che non potesse aversi la certezza che le misure fatte sulle fotografie dovessero corrispondere a quelle eseguite direttamente; perchè altra poteva essere l'azione chimica, altra quella fisiologica della luce. Tuttavia, dopo conosciuti i recenti lavori del Wiener [1]) e dell'Acworth [2]) sull'azione

1) O. Wiener. *Wied. Ann.* 40, p. 203, 1890.
2) Acworth. *Wied. Ann.* 42, p. 371, 1891.

chimica della luce, mi decisi a far quelle fotografie, se non altro per riconoscere quale differenza vi fosse stata fra le apparenze delle figure luminose fissate colla fotografia, e di quelle osservate direttamente. Le due fotografie che presento all'onorevole Accademia, sono le stampe ottenute dalle negative che nel luglio p. p. furon prese, con un'eccellente macchina fotografica, dal distinto fotografo sig. De Giuli [1]).

I cartoncini rotanti eran disposti come dianzi ho indicato, ed erano illuminati dai raggi solari rinviati sui cartoni stessi per mezzo degli specchi L, S, S_1. La durata dell'esposizione fu di due minuti primi per ciascuna, e fu presa ogni precauzione perchè per tutto quel tempo la velocità di rotazione restasse costante e perchè fosse la stessa (22 giri al secondo) nei due casi.

L'aspetto delle fotografie così ottenute è in tutto simile a quello che si osserva direttamente durante la rotazione dei respettivi cartoncini; ed anche dall'esame di queste si può concludere, che la degradazione nell'intensità luminosa è più uniforme nella figura ottenuta colla curva di Plateau, che con quella del Delboeuf.

Lucca, Novembre 1891.

1) La regione centrale nelle fotografie ottenute non è uniformemente nera, nè circolare, a motivo dell'ombra portata dal disco metallico, coperto di foglio nero, che serviva a fissare il cartone sull'asse, e dovuta all'incidenza quasi radente della luce.

A questa Nota dovevano essere unite le riproduzioni di queste figure in fototipia; ma ciò non è ora possibile, essendosi rotta una delle negative durante le operazioni necessarie a quella riproduzione.

SUL PRINCIPIO DI HUYGHENS.

Avendo la Direzione di questo giornale desiderato un resoconto delle pubblicazioni di Kirchhoff, Beltrami, Poincarè, uscite recentemente, nelle quali si tratta del principio di Huyghens, pubblico la seguente lezione di un corso fatto in quest'anno sulla elasticità e l'ottica, la quale riassume i detti lavori. Per norma dei lettori, osservo che la presente lezione faceva parte del capitolo sulle vibrazioni dei fluidi elastici, seguiva la teoria delle onde piane e sferiche, ed era premessa al capitolo in cui doveva esporsi la teoria di Helmholtz, sui tubi sonori. L'applicazione all'ottica dei risultati ottenuti derivava immediatamente dalla dimostrazione che anche le vibrazioni trasversali nei mezzi isotropi dipendono dalla equazione differenziale (1).

Prof. VITO VOLTERRA.

1. L'equazione differenziale

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = a^2 \Delta^2 \theta \qquad (1)$$

a cui soddisfa il potenziale di velocità ed il potenziale degli spostamenti di un fluido elastico vibrante, ammette l'integrale trovato da Eulero

$$\theta = \frac{f(r + at) + \phi(r - at)}{r}$$

essendo $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ e denotando con f e ϕ due funzioni arbitrarie. Questo integrale corrisponde ad onde sferiche progressive e regressive il cui centro è il punto $x_0\ y_0\ z_0$, le quali si propagano colla velocità a.

Cambiando il centro e la funzione arbitraria ϕ, otterremo infiniti integrali particolari della (1), e siccome questa equazione è lineare, così potremo avere un nuovo integrale sommando un numero qualunque di queste soluzioni particolari. Si avrà dunque come integrale della (1).

$$\theta = \sum_{1}^{n}{}_i \frac{\phi_i(r_i - at)}{r_i} \qquad (2)$$

essendo $r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$ e rappresentan-

do con ϕ_i delle funzioni arbitrarie. Se queste funzioni saranno regolari, θ e le sue derivate non avranno delle singolarità che nei centri $x_i\ y_i\ z_i$.

Consideriamo il caso di due soli centri A, B. Siano $x_1\ y_1\ z_1$ le coordinate di A, e si denoti con s_1 il segmento A B, con α, β, γ i suoi coseni di direzione.

Le coordinate di B saranno allora

$$x_2 = x_1 + \alpha s_1\,, \qquad y_2 = y_1 + \beta s_1\,, \qquad z_2 = z_1 + \gamma s_1$$

quindi

$$\theta = \frac{\phi_1(r_1 - at)}{r_1} + \frac{\phi_2(r_2 - at)}{r_2}\,.$$

Si prenda

$$-\phi_1 = \phi_2 = \frac{\phi}{s_1}\,.$$

Avremo

$$\theta = \frac{1}{s_1}\left[\frac{\phi(r_2 - at)}{r_2} - \frac{\phi(r_1 - at)}{r_1}\right]$$

Facciamo ora avvicinare indefinitamente il punto B al punto A diminuendo s_1 e conservando costanti α, β, γ. Otterremo

$$\theta_1 = \lim_{s_1=0} \theta = \lim_{s_1=0} \frac{1}{s_1}\left[\frac{\phi(r_2 - at)}{r_2} - \frac{\phi(r_1 - at)}{r_1}\right] = \frac{d}{ds_1}\frac{\phi(r_1 - at)}{r_1}$$

$$= \left[\frac{\phi'(r_1 - at)}{r_1} - \frac{\phi(r_1 - at)}{r_1^2}\right]\left[\frac{(x_1 - x)\alpha + (y_1 - y)\beta + (z_1 - z)\gamma}{r_1}\right]$$

Si trova in tal modo un nuovo integrale della equazione (1). Se esaminiamo il moto corrispondente al potenziale di velocità θ_1, si vede facilmente che esso è un movimento che si propaga per onde sferiche il cui centro è il punto $x_1\ y_1\ z_1$. Nello stesso modo calcolando

$$\theta_2 = \frac{d\theta_1}{ds_2}$$

essendo s_2 una direzione eguale o diversa da s_1, otterremo un nuovo integrale della equazione il quale corrisponderà ad un

movimento che esso pure si propaga dallo stesso centro per onde sferiche. Si vede dunque che può ottenersi una generalizzazione dei moti che si propagano per onde sferiche prendendo per potenziale di velocità

$$\theta_p = \frac{d^p}{ds_1 \, ds_2 \dots ds_p} \theta$$

essendo $\theta = \frac{\phi(r_1 - at)}{r_1}$, ed s_1, $s_2 \dots s_p$ p direzioni arbitrarie. Se ammettiamo la funzione f regolare, avremo che θ_p sarà una funzione regolare in tutto lo spazio, escluso il punto $r_1 = 0$. Seguiteremo a chiamare questo punto il centro delle onde sferiche, senonchè lo diremo un *centro multiplo* di ordine p, per distinguere il caso in cui il potenziale di velocità è θ, e in cui diremo che il punto $r_1 = 0$ è un *centro semplice*. Un centro multiplo è caratterizzato non solo dalla sua posizione, ma anche dalle p direzioni s_1 $s_2 \dots s_p$. In particolare un centro doppio sarà caratterizzato dalla sua posizione e dalla direzione s_1 secondo la quale si sono avvicinati indefinitamente i due centri semplici che lo costituiscono.

2. Nella formula (2) distinguiamo la funzione arbitraria corrispondente al centro x_i y_i z_i, scrivendola

$$\phi_i(r_i - at) = \phi(x_i, y_i, z_i, r_i - at).$$

Avremo allora

$$\theta = \sum_1^n{}_i \frac{\phi(x_i, y_i, z_i, r_i - at)}{r_i}$$

Invece di considerare una somma come la precedente che corrisponde ad un numero finito di centri, consideriamo una espressione analoga corrispondente ad un sistema continuo di centri distribuiti in un certo spazio a tre dimensioni S o sopra una superficie σ o una linea s. Otterremo in tal modo le funzioni

$$\theta(x,y,z,t)=\int_S \frac{\phi(\xi,\eta,\zeta,r-at)}{r}\,dS,$$

$$\theta(x,y,z,t)=\int_\sigma \frac{\phi(\xi,\eta,\zeta,r-at)}{r}\,d\sigma,\quad r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

$$\theta(x,y,z,t)=\int_\sigma \frac{\phi(\xi,\eta,\zeta,r-at)}{r}\,ds,$$

in cui ξ, η, ζ denotano respettivamente le coordinate dei punti dello spazio S, o della superficie σ, o della linea s, di cui dS, $d\sigma$, ds sono respettivamente gli elementi di volume, d' area o di lunghezza.

Le funzioni così trovate soddisfaranno evidentemente in tutti i punti esterni agli spazii S, σ, s, la equazione differenziale (1), quando si ammetta che le funzioni $\phi(\xi,\eta,\zeta,l)$ abbiano rispetto ad l la derivata seconda finita e continua. Analogamente potremo ottener infiniti altri integrali della equazione (1) considerando invece delle distribuzioni continue di centri semplici delle distribuzioni continue di centri multipli in modo che si abbia

$$\theta(x,y,z,t)=\int_\Sigma \frac{d^p}{ds_1\,ds_2\ldots ds_p}\left(\frac{\phi(\xi,\eta,\zeta,r-at)}{r}\right)d\Sigma$$

in cui Σ denota uno spazio a una due o tre dimensioni. Si noti che in questa formula le derivate rispetto a $s_1\,s_2\ldots s_p$ vanno eseguite ritenendo $\frac{\phi(\xi,\eta,\zeta,r-at)}{r}$ come funzione di $s_1\,s_2\ldots s_p$ per mezzo di r; cioè le ξ,η,ζ che compariscono esplicitamente in ϕ vanno considerate come costanti nell' eseguire le dette derivazioni.

La θ così ottenuta soddisfarà evidentemente l' equazione differenziale (1) in tutti i punti esterni allo spazio Σ.

3. Delle infinite funzioni che si possono costruire in questa guisa noi esamineremo in particolare le seguenti:

1° le distribuzioni di centri semplici entro spazii a tre dimensioni;

2° le distribuzioni di centri semplici sopra superficie;

3° le distribuzioni di centri doppii sopra superficie; essendo le direzioni corrispondenti ai centri doppii normali alle superficie stesse.

È evidente l' analogia fra la teoria che andiamo ora svolgendo e quella della funzione potenziale newtoniana. In questa ultima teoria si ha la funzione potenziale elementare $1/r$, e da essa si ricavano le funzioni potenziali dei corpi a tre dimensioni delle superficie e dei doppii strati. Queste funzioni sono simili a quelle che si ottengono dalle distribuzioni che vogliamo esaminare. Affinchè queste ultime funzioni si riducano alle dette funzioni potenziali, basterà supporre che $\phi(\xi, \eta, \zeta, l)$ sia indipendente da l. Allora ϕ rappresenta la densità.

4. Cominciamo dall' estendere la formula di Poisson (Vedi Betti, teorica delle forze newtoniane Cap. I, § IX). A tal fine ammettiamo che la funzione $\phi(\xi, \eta, \zeta, l)$ oltre ad avere la derivata seconda rispetto ad l finita e continua goda rispetto a ξ, η, ζ delle proprietà richieste affinchè considerata come una densità (cioè ritenendo l costante) si possa applicare il teorema di Poisson. Si ha

$$\theta = \int_S \frac{\phi(\xi, \eta, \zeta, r - at)}{r} dS = \int_S \frac{\phi(\xi, \eta, \zeta, -at)}{r} dS + \int_S \frac{\phi(\xi, \eta, \zeta, r - at) - f(\xi, \eta, \zeta, -at)}{r} dS.$$

Posto

$$\theta_1 = \int_S \frac{\phi(\xi, \eta, \zeta, -at)}{r} dS, \quad \theta_2 = \int_S \frac{\phi(\xi, \eta, \zeta, r - at) - \phi(\xi, \eta, \zeta, -at)}{r} dS$$

resulterà

$$\theta = \theta_1 + \theta_2.$$

Ora supponendo t costante, θ_1 è una ordinaria funzione potenziale, quindi per le condizioni poste, a cagione della formula di Poisson,

$$\Delta^2 \theta_1 = -4\pi\phi(x, y, z, -at)$$

essendo x, y, z un punto interno allo spazio S.

Poniamo

$$\frac{d\phi}{dl} = \phi_1(\xi,\eta,\zeta,l)\,,\ \frac{d^2\phi}{dl^2} = \phi_2(\xi,\eta,\zeta,l)\,.$$

La funzione

$$\mathrm{G} = \frac{\phi(\xi\eta,\zeta,r-at)-\phi(\xi,\eta,\zeta,-at)}{r} = \phi_1(\xi,\eta,\zeta,\vartheta r-at)$$

(in cui $1 > \vartheta > 0$) è finita e continua anche per $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$. Derivandola si otterrà

$$(3)\quad \frac{d\mathrm{G}}{dx} = \left(\frac{\phi_1(\xi,\eta,\zeta,r-at)}{r} - \frac{\phi(\xi,\eta,\zeta,r-at)-\phi(\xi,\eta,\zeta,-at)}{r^2}\right)\frac{dr}{dx}$$

$$= \left(\frac{\phi_1(\xi,\eta,\zeta,r-at)-\phi_1(\xi,\eta,\zeta,\vartheta r-at)}{r}\right)\frac{dr}{dx}$$

$$= (1-\vartheta)\,\phi_2\,(\xi,\eta,\zeta,\vartheta_1 r-at)\,\frac{dr}{dx} \qquad (1 > \vartheta_1 > \vartheta)$$

quindi $\frac{d\mathrm{G}}{dx}$ è finita anche per $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$.

Analogamente si vede che anche $\frac{d\mathrm{G}}{dy}$, $\frac{d\mathrm{G}}{dz}$ godono delle stesse proprietà. Derivando nuovamente la (3) avremo

$$\frac{d^2\mathrm{G}}{dx^2} = (1-\vartheta)\phi_2(\xi,\eta,\zeta,\vartheta_1 r-at)\frac{d^2r}{dx^2} + \left(\frac{\phi_2(\xi,\eta,\zeta,r-at)}{r} - \frac{2\phi_1(\xi,\eta,\zeta,r-at)}{r^2}\right.$$

$$\left. + 2\,\frac{\phi(\xi,\eta,\zeta,r-at)-\phi(\xi,\eta,\zeta,-at)}{r^3}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right)^2$$

$$= (1-\vartheta)\,\phi_2\,(\xi,\eta,\zeta,\vartheta_1 r-at)\,\frac{d^2r}{dx^2}$$

$$+\left(\frac{\phi_2(\xi,\eta,\zeta,r-at)-2\,(1-\vartheta)\,\phi_2(\xi,\eta,\zeta,\vartheta_1 r-at)}{r}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right)^2$$

quindi $\frac{d^2\mathrm{G}}{dx^2}$, può tutto al più divenire infinita del 1° ordine per

$\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$. Lo stesso può dirsi per $\frac{d^2 G}{dy^2}$, $\frac{d^2 G}{dz^2}$. Dalle formule precedenti segue che $\theta_2 = \int G dS$ e le sue derivate prime e seconde sono funzioni finite e continue, e che per calcolare il $\Delta^2 \theta_2$, basta applicare la regola di derivazione sotto il segno. Si otterrà dunque

$$\Delta^2\theta_2 = \int_S \left\{ \frac{1}{r} \Delta^2\phi + 2 \Delta \left(\phi, \frac{1}{r}\right) \right\} dS = \int_S \left[\frac{1}{r} \left(\frac{d^2\phi}{dr^2} \Delta r + \frac{d\phi}{dr} \Delta^2 r \right) + 2 \frac{d\phi}{dr} \Delta \left(r, \frac{1}{r}\right) \right] dS.$$

Ma

$$\Delta r = 1, \qquad \Delta^2 r = \frac{2}{r}, \qquad \Delta \left(r, \frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2};$$

quindi

$$\Delta^2\theta_2 = \int_S \frac{1}{r} \frac{d^2\phi}{dr^2} dS = \int_S \frac{1}{r} \frac{1}{a^2} \frac{d^2\phi}{dt^2} dS = \frac{1}{a^2} \frac{d^2}{dt^2} \int_S \frac{\phi}{r} dS = \frac{1}{a^2} \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Ne segue

$$\Delta^2\theta = \Delta^2\theta_1 + \Delta^2\theta_2 = -4\pi\phi(x, y, z, -at) + \frac{1}{a^2} \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

vale a dire

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - a^2 \Delta^2 \theta = 4\pi a^2 \phi(x, y, z, -at) \tag{4}$$

in tutti i punti $x\ y\ z$ dello spazio S.

In questa formula consiste la generalizzazione cercata della formula di Poisson.

5. Passiamo ora ad esaminare una distribuzione superficiale di centri semplici. Ammettiamo la superficie senza punti singolari e supponiamo che $\phi(\xi, \eta, \zeta, l)$ considerata come funzione di ξ, η, ζ (l ritenuto costante) goda delle proprietà che si attribuiscono alle densità superficiali nella teoria delle forze newtoniane (vedi Betti op. cit. § VIII) supporremo inoltre, come precedentemente, che essa ammetta la derivata seconda rispetto ad l finita e continua. Sarà quindi applicabile anche in questo caso la formula (3). Si avrà

$$\theta(x, y, z, t) = \int\limits_\sigma \frac{\phi(\xi, \eta, \zeta, r - at)}{r} d\sigma = \int\limits_\sigma \frac{\phi(\xi, \eta, \zeta, -at)}{r} d\sigma$$

$$+ \int\limits_\sigma \frac{\phi(\xi, \eta, \zeta, r - at) - \phi(\xi, \eta, \zeta, -at)}{r} d\sigma$$

Posto

$$\theta_1 = \int\limits_\sigma \frac{\phi(\xi, \eta, \zeta, -at)}{r} d\sigma\,, \quad \theta_2 = \int \frac{\phi(\xi,\eta,\zeta,r-at) - \phi(\xi,\eta,\zeta,-at)}{r} d\sigma$$

potremo scrivere

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 \tag{5}$$

Chiamiamo n_1 e n_2 le normali alla superficie σ dalle due parti di essa, le cui direzioni sono quelle secondo le quali ci si allontana dalla superficie stessa. Si avrà:

$$\frac{d\theta_1}{dn_1} + \frac{d\theta_1}{dn_2} = -4\,\pi\phi\,(x, y, z, -at) \tag{6}$$

La funzione G che comparisce sotto al segno d' integrazione nella espressione di θ_2 e le derivate $\frac{dG}{dx}$, $\frac{dG}{dy}$, $\frac{dG}{dz}$ sono finite (vedi formula (3)) anche per $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$; quindi θ_2 e le sue derivate prime si mantengono finite e continue anche attraversando la superficie σ. Dalle (5) e (6) si deduce dunque:

$$\frac{d\theta}{dn_1} + \frac{d\theta}{dn_2} = -4\pi\phi\,(x, y, z, -at) \tag{7}$$

(Cfr. la formula (6) del § citato del Betti).

6. Consideriamo finalmente una distribuzione di centri doppii sopra una superficie σ, disposti normalmente ad essa. Avremo

$$\theta = \int_\sigma \frac{d}{dn}\frac{\phi(\xi,\eta,\zeta,r-at)}{r}d\sigma = \int_\sigma \phi(\xi,\eta,\zeta,r-at)\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma$$

$$+\int_\sigma \frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr}\frac{dr}{dn}d\sigma = \int_\sigma \phi(\xi,\eta,\zeta,-at)\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma$$

$$+\int_\sigma \left[\frac{d\phi}{dr} - \frac{\phi(\xi,\eta,\zeta,r-at)-\phi(\xi,\eta,\zeta,-at)}{r}\right]\frac{1}{r}\frac{dr}{dn}d\sigma$$

essendo n normale a σ.

Posto

$$\theta_1 = \int_\sigma \phi(\xi,\eta,\zeta,-at)\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma,$$

$$\theta_2 = \int_\sigma \left[\frac{d\phi}{dr} - \frac{\phi(\xi,\eta,\zeta,r-at)-\phi(\xi,\eta,\zeta,-at)}{r}\right]\frac{1}{r}\frac{dr}{dn}d\sigma$$

resulterà

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 .$$

Ora θ_1 (supponendo t costante) è una funzione potenziale ordinaria di un doppio strato; quindi ammettendo che $\phi(\xi,\eta,\zeta,t)$, considerata come funzione di ξ,η,ζ goda delle proprietà che si attribuiscono alle densità dei doppii strati (Betti op. cit. § XII), avremo

(8) $$(\theta_1)_e - (\theta_1)_i = 4\pi\phi(x,y,z,-at),$$

denotando con $(\theta_1)_e$ il valore che prende la funzione θ_1 nel punto x, y, z dalla parte di σ da cui esce la direzione positiva di n e con $(\theta_1)_i$ il valore di θ_1 nello stesso punto x, y, z, ma dalla parte di σ da cui entra la direzione positiva di n; mentre

(9) $$\left(\frac{d\theta_1}{dn}\right)_e = \left(\frac{d\theta_1}{dn}\right)_i .$$

Avremo poi che la funzione

$$H = \left[\frac{d\phi}{dr} - \frac{\phi(\xi,\eta,\zeta,r-at)-\phi(\xi,\eta,\zeta,-at)}{r}\right]\frac{1}{r}\frac{dr}{dn}$$

è finita anche per $x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta$. Infatti può scriversi

$$H=\left[\phi_1(\xi,\eta,\zeta,r-at)-\phi_1(\xi,\eta,\zeta,\vartheta r-at)\right]\frac{1}{r}\frac{dr}{dn}$$
$$=(1-\vartheta)\,\phi_2(\xi,\eta,\zeta,\vartheta_1 r-at)\,.$$

Ne segue che $\theta_2=\int_\sigma H\,d\sigma$ si conserverà continua anche attraversando la superficie σ.

Avremo poi

$$\frac{dH}{dx}=-\left[\frac{d\phi}{dr}-\frac{\phi(\xi,\eta,\zeta,r-at)-\phi(\xi,\eta,\zeta,-at)}{r}\right]\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}\frac{dr}{dn}$$
$$+\left[\frac{d^2\phi}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr}+\frac{\phi(\xi,\eta,\zeta,r-at)-\phi(\xi,\eta,\zeta,-at)}{r^2}\right]\frac{1}{r}\frac{dr}{dx}\frac{dr}{dn}$$
$$+\left[\frac{d\phi}{dr}-\frac{\phi(\xi,\eta,\zeta,r-at)-\phi(\xi,\eta,\zeta,-at)}{r}\right]\frac{1}{r}\frac{d}{dx}\frac{dr}{dn}$$
$$=\left[-2(1-\vartheta)\,\phi_2(\xi,\eta,\zeta,\vartheta_1 r-at)+\phi_2(\xi,\eta,\zeta,r-at)\right]\frac{1}{r}\frac{dr}{dx}\frac{dr}{dn}$$
$$+(1-\vartheta)\,\phi_2(\xi,\eta,\zeta,\vartheta_1 r-at)\frac{d}{dx}\frac{dr}{dn}\,.$$

Quindi $\frac{dH}{dx}$ potrà al più divenire infinita del 1° ordine per $x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta$. Lo stesso vale evidentemente per $\frac{dH}{dy}$, $\frac{dH}{dz}$. Se ne conclude che anche le derivate prime di θ_2 si manterranno continue attraversando la superficie σ. Dunque

$$(\theta_2)_e-(\theta_2)_i=0,\ \left(\frac{d\theta_2}{dn}\right)_e-\left(\frac{d\theta_2}{dn}\right)_i=0$$

e per conseguenza, tenendo presenti le (8), (9),

$$(10)\qquad \begin{cases} (\theta)_e - (\theta)_i = 4\,\pi\phi\,(\xi,\eta,\zeta,-at) \\ \left(\frac{d\theta}{dn}\right)_e - \left(\frac{d\theta}{dn}\right)_i = 0\,. \end{cases}$$

7. Veduto così mediante le formule (4) (7) (10) la estensione della teoria ordinaria della funzione potenziale alle distribuzioni continue di centri semplici e doppii, ricordiamo che la formula di Green conduce immediatamente al teorema seguente: *Ogni funzione armonica* [1]) *regolare entro uno spazio S può ritenersi come la funzione potenziale di una superficie e di un doppio strato distribuiti sul contorno* σ.

Infatti se V è una funzione armonica regolare entro S, la formula di Green dà (Vedi Betti op. cit. § XI form. (8)).

$$(11)\qquad V\,(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(V\,\frac{d\,\frac{1}{r}}{dn} - \frac{dV}{dn}\,\frac{1}{r} \right) d\sigma$$

in cui $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ (essendo $\xi,\ \eta,\ \zeta$ il punto variabile sopra la superficie σ) e in cui n è la normale alla superficie stessa. Ponendo

$$\frac{V(\xi,\eta,\zeta)}{4\pi} = f(\xi,\eta,\zeta)\,,\quad -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn} = \phi(\xi,\eta,\zeta)$$

la formula precedente diviene

$$V\,(x,y,z) = \int_\sigma f(\xi,\eta,\zeta)\,\frac{d\,\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma + \int_\sigma \phi(\xi,\eta,\zeta)\,\frac{1}{r}\,d\sigma$$

la quale mostra chiaramente il significato che abbiamo attribuito al teorema di Green.

Sovrapponiamo ora nel contorno σ dello spazio S due distri-

1) Per funzione armonica intendiamo una funzione che soddisfa la equazione differenziale $\Delta^2 = 0$.

buzioni di centri semplici e di centri doppii normali a σ. Otterremo in tal modo

$$(12)\ \theta(x, y, z, t) = \int_{\sigma} \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta, r - at)}{r} d\sigma + \int_{\sigma} \frac{d}{dn} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, r - at)}{r} d\sigma$$

La funzione $\theta(x, y, z, t)$ soddisfa evidentemente in tutti i punti interni ad S l'equazione (1). Proponiamoci ora di vedere se il teorema precedentemente enunciato per le funzioni armoniche può estendersi agli integrali regolari della (1), cioè *se tutte le funzioni regolari entro* S *che soddisfano la* (1) *possono porsi sotto la forma* (12).

(Continua).

SULLA TEORIA DELLO STEREOSCOPIO; NOTA DEL PROF. A. RIGHI.

Mentre le immagini stereoscopiche (disegni o fotografie) presentano un rilievo evidentissimo quando si guardano collo stereoscopio, o quando in altro modo si ottenga la loro fusione binoculare, è rarissimo il caso di trovarne di quelle che mostrino gli oggetti rappresentati colle loro vere dimensioni. È mio scopo l'enunciare in questa Nota le condizioni che devono essere soddisfatte onde la riproduzione stereoscopica sia la più fedele possibile.

È anzi tutto da osservare che onde nella visione collo stereoscopio apparisse l'oggetto esattamente al vero, converrebbe, non solo che per ciascun punto dell'oggetto apparente la convergenza delle visuali fosse la stessa che quando si guarda direttamente l'oggetto vero, ma anche che nei due casi fosse identica l'accomodazione degli occhi. Ora, mentre si può, come si vedrà, soddisfare alla prima condizione, non è possibile soddisfare alla seconda. Infatti l'accomodazione varia per i vari punti dell'oggetto reale, se questi punti sono a distanze diverse dal-

l'osservatore, mentre invece quando si ottiene la fusione delle due immagini coniugate, l'accomodazione è sensibilmente la stessa per tutti i punti dell'oggetto apparente. La perfezione massima che si potrà ottenere nella riproduzione stereoscopica di un oggetto a tre dimensioni si avrà dunque quando la convergenza delle visuali è per ogni punto mantenuta la stessa. L'accomodazione avrà intanto un medesimo valore per tutti i punti dell'oggetto visto nello stereoscopio. Per un paesaggio quest'accomodazione potrà essere quella che ha luogo per i punti infinitamente lontani, il chè corrisponde all'assenza completa di sforzo accomodativo per un occhio normale. Nel caso invece d'un oggetto le cui varie parti sono a distanze dall'osservatore non molto diverse, sarà bene che l'accomodazione degli occhi, allorchè si fondono le due sue immagini coniugate, sia uguale all'accomodazione che ha luogo per un punto medio dell'oggetto allorchè lo si osserva direttamente.

Non teniamo conto pel momento della diversità di accomodazione, e vediamo quali condizioni debbono essere soddisfatte, perchè almeno la convergenza delle visuali sia rettamente riprodotta per tutti i punti dell'oggetto che si vuol mostrare collo stereoscopio.

Si prendano tre assi ortogonali aventi l'origine nel punto di mezzo della retta che unisce i due centri OO' dai quali si proiettano sopra un piano le due prospettive dell'oggetto, destinate ad essere osservate nello stereoscopio. La distanza fra questi due centri di proiezione la chiameremo 2D, mentre diremo $2d$ la distanza fra i due occhi dell'osservatore. Siccome la retta che unisce gli occhi di un osservatore nelle condizioni usuali è orizzontale, così si usa prendere i detti due centri sopra una stessa orizzontale; supporremo pure, sempre per rimanere nelle condizioni usuali, che il piano su cui si disegnano le due prospettive sia verticale e parallelo ad OO'. Sia b la sua distanza dai due centri. Prenderemo l'asse delle x in modo che passi pei due centri, e sia diretto verso il centro di destra O. L'asse delle y lo prenderemo anch'esso orizzontale e diretto verso l'oggetto. Per conseguenza sarà perpendicolare al piano delle prospettive. Infine l'asse delle z sarà verticale e lo assumeremo diretto dal basso all'alto.

Naturalmente, se ad ottenere le due prospettive coniugate si adopera la fotografia, 2D sarà la distanza fra i cèntri dei due obbiettivi, e b la distanza fra questi e la lastra sensibile.

Siano $X_0 Y_0 Z_0$ le coordinate di un punto M_0 dell'oggetto, xyz quelle della sua prospettiva m presa dal centro di destra, $x'y'z'$ quelle della prospettiva m' di M_0 presa dal centro di sinistra.

Evidentemente sarà $y = y' = b$; e siccome i punti M_0, m, O sono in linea retta come pure i punti M_0, m', O', si avrà:

$$\frac{X_0 - D}{x - D} = \frac{X_0 + D}{x' + D} = \frac{Y_0}{y} = \frac{Z_0}{z} = \frac{Z_0}{z'},$$

e quindi:

$$(1) \quad \begin{cases} x = \frac{b}{Y_0}(X_0 - D) + D, & x' = \frac{b}{Y_0}(X_0 + D) - D, \\ y = y' = b, & z = z' = b\frac{Z_0}{Y_0} \end{cases}$$

Queste formole fanno conoscere le coordinate delle prospettive di un punto, in funzione di quelle del punto stesso. Risolvendole rispetto ad X_0, Y_0, Z_0, si ha reciprocamente:

$$(2) \quad X_0 = \frac{D(x + x')}{2D - x + x'}, \quad Y_0 = \frac{2\,Dy}{2D - x + x'}, \quad Z_0 = \frac{2\,Dz}{2D - x + x'},$$

e queste formole fanno conoscere la posizione del punto M_0 in funzione delle coordinate delle sue due prospettive. Formole equivalenti alle (2) furono già date da Helmholtz nella sua Ottica fisiologica.

Ciò posto, supponiamo che le due prospettive siano messe in uno stereoscopio. Per maggiore generalità supporremo che la distanza b_1 fra esse e le due lenti dell'istrumento sia differente da b, e che inoltre la distanza fra le due immagini coniugate non sia la stessa di quella alla quale si trovavano quando furono ottenute, ma che invece tale distanza siasi aumentata di $2a$, e ciò ogni immagine sia stata allontanata della quantità a dal piano yz. Un tal aumento di distanza quasi sempre è neces-

sario onde evitare che le due immagini restino in parte sovrapposte.

Supporremo l' osservatore posto precisamente nella posizione dalla quale si presero le due immagini, di guisa che il punto di mezzo della retta che unisce i suoi due occhi sia nell'origine delle coordinate. Siccome non è possibile far coincidere questa retta con quella che unisce i centri ottici delle due lenti, così supporremo che queste due rette, parallele e poste in uno stesso piano orizzontale, distino di una quantità ω. La distanza fra gli occhi e le due prospettive sarà dunque $b_1+\omega$. Sia f la distanza focale delle lenti dello stereoscopio e $2l$ la distanza dei loro centri. Determiniamo le coordinate XYZ del punto M che appare dalla fusione delle due prospettive m, m' del punto M_0, viste attraverso lo stereoscopio.

Anzitutto i punti m ed m' occupano ora nuove posizioni che diremo $m_1 m'_1$. Le loro coordinate, che diremo $x_1\, y_1\, z_1$, $x'_1 y'_1 z'_1$, saranno le seguenti:

$$(3)\quad x_1=x+a,\ y_1=b_1+\omega,\ z_1=z;\quad x'_1=x'-a,\ y'_1=b_1+\omega,\ z'_1=z.$$

Il punto m_1 è visto adesso attraverso alla lente di destra, che ne dà un' immagine virtuale m_2 di coordinate $x_2 y_2 z_2$, ed il punto m'_1 è visto colla lente di sinistra, che ne dà un' immagine virtuale m'_2 di coordinate $x'_2 y'_2 z'_2$. Essendo in linea retta il centro ottico della lente di destra (le cui coordinate sono $l, \omega, 0$), il punto m_1 ed il punto m_2, si avrà:

$$\frac{x_2-l}{x_1-l}=\frac{y_2-\omega}{y_1-\omega}=\frac{z_2}{z_1},$$

e per la formola delle lenti:

$$y_2-\omega=\frac{(y_1-\omega)f}{f-y_1+\omega}.$$

Se ne ricava:

$$(5)\quad \begin{cases} x_2=l+\dfrac{f(x_1-l)}{f-y_1+\omega}, & x'_2=-l+\dfrac{f(x'_1+l)}{f-y_1+\omega}, \\ y_2=\omega+\dfrac{f(y_1-\omega)}{f-y_1+\omega}, \text{ e analogamente:} & y'_2=y_2, \\ z_2=\dfrac{fz_1}{f-y_1+\omega}, & z'_2=z_2. \end{cases}$$

Si può quindi far astrazione dallo stereoscopio, e supporre che i due occhi guardino rispettivamente i punti m_2 ed m'_2. Per avere le coordinate XYZ del punto M proveniente dalla fusione binoculare di m_2 ed m'_2 bisognerà quindi far uso delle formole (2), scrivendo naturalmente XYZ al posto di $X_0Y_0Z_0$ ed $x_2y_2z_2$ $x'_2y'_2z'_2$ al posto di $xyzx'y'z'$, come pure d al posto di D. Si ha dunque:

$$X = \frac{d(x_2 + x'_2)}{2d - x_2 + x'_2}, \quad Y = \frac{2dy_2}{2d - x_2 + x'_2}, \quad Z = \frac{2dz_2}{2d - x_2 + x'_2}.$$

Sostituendo in queste formole, ad $x_2y_2\ldots$ i loro valori dati dalle (4), poi introducendo successivamente quelle di $y_1\,x_1\ldots$ dati dalle (3), ed infine quelli di $xy\ldots$ dati dalle (1), si ottiene per ultimo:

$$(5) \quad X = \frac{bdfX_0}{bDf + KY_0}, \quad Y = \frac{d(b_1f - b_1\omega + f\omega)Y_0}{bDf + KY_0}, \quad Z = \frac{bdfZ_0}{bDf - KY_0}$$

essendosi posto per brevità:

$$(6) \qquad K = b_1(l - d) - f(D - d + a).$$

Queste formole, che danno le coordinate XYZ del punto M che apparisce nello stereoscopio in luogo del punto $M_0(X_0Y_0Z_0)$ che si era voluto rappresentare, opportunamente discusse, contengono tutta la teoria dello stereoscopio.

Se si vuole che ogni punto dell' oggetto apparente coincida colla sua vera posizione, occorre siano soddisfatte insieme le tre condizioni:

$$(7) \qquad d = D, \quad d(b_1f - b_1\omega + f\omega) = bDf, \quad K = 0,$$

la prima delle quali esprime che le due prospettive devono essere prese da due centri la cui distanza sia eguale alla distanza reciproca fra i due occhi. Questa condizione non è mai soddisfatta dalle fotografie stereoscopiche del commercio, le quali sempre vengono fatte o con un solo obbiettivo che si sposta fra una prova e l' altra d' una quantità 2D alquanto maggiore della distanza media fra gli occhi, o più spesso con una macchina a

due obbiettivi i cui centri sono pure più lontani fra loro che non gli occhi d'una persona. Questa è la causa principale per cui le vedute stereoscopiche mostrano ordinariamente gli oggetti in dimensioni ridotte.

La seconda delle (7) si riduce a $b = b_1$, qualora si supponga soddisfatta la prima, e si trascuri ω di fronte a b_1 ed f. Bisogna dunque che la distanza fra il piano delle prospettive e le lenti dello stereoscopio sia sensibilmente eguale a quella fra il piano del disegno e i due centri di proiezione, o, nel caso di fotografie, fra gli obbiettivi e la lastra sensibile.

Dalle formole (5) si deduce facilmente a che si riduca l'effetto delle due lenti dello stereoscopio. Si ponga infatti $b_1(l-d) = f\alpha$ e quindi $K = -f(D-d+a-\alpha)$. Le (5) divengono:

$$X = \frac{bdX_0}{bD - Y_0(D-d+a-\alpha)}, \quad Y = \frac{d(b_1 - \frac{b_1}{f}\omega + \omega)Y_0}{\cdots\cdots\cdots\cdots}, \quad Z = \frac{bdZ_0}{\cdots\cdots}$$

Se d'altra parte si fa nelle (5) $f = \infty$, ossia si sopprime lo stereoscopio, si ha:

$$X = \frac{bdX_0}{bD - Y_0(D-d+a)}, \quad Y = \frac{d(b_1+\omega)Y_0}{\cdots\cdots}, \quad Z = \frac{bdZ_0}{\cdots\cdots}.$$

Se si trascura ω e si cambia a in $a-\alpha$, si cade nelle formole precedenti. Il chè vuol dire che, astrazione fatta dall'essere gli occhi un po' indietro dalle lenti, queste fanno lo stesso effetto di un semplice avvicinamento reciproco 2α delle due prospettive. Siccome le due prospettive possono riuscire sovrapposte in parte, così si è costretti ad allontanarle di una quantità $2a$ per separarle. Lo stereoscopio ha per effetto di compensare questo spostamento, se la distanza reciproca delle sue lenti $2l$, la loro distanza focale f e la distanza b_1 fra esse e le due prospettive sono tali che si abbia $fa = b_1(l-d)$.

Se $b_1 = f$, cioè se si guardano le prospettive in modo che le immagini che di esse formano le lenti dello stereoscopio siano a distanza infinita, si ha semplicemente $a = l - d$, e cioè l'allontanamento reciproco da darsi alle due prospettive è eguale alla differenza che passa fra la distanza dei centri delle lenti e la distanza dei due occhi.

In questa ipotesi di $b_1 = f$ le (7) si riducono a

$$d = D, \quad b = b_1 = f, \quad a = l - d,$$

dalle quali è sparito ω. Se dunque si prendono b e b_1 eguali ad f, D eguale a d, ed a eguale ad $l - d$, l'oggetto apparente coinciderà col reale, qualunque sia la distanza alla quale si tengono dagli occhi le lenti dello stereoscopio. È chiaro che tutti i punti dell'oggetto apparente, anche i più vicini, saranno visti senza sforzo accomodativo, ossia cogli occhi accomodati per distanza infinita. Ma siccome nella visione binoculare la percezione delle distanze si basa principalmente sulla convergenza delle visuali, così, essendo questa esattamente riprodotta, si avrà con la massima possibile perfezione l'effetto stereoscopico cercato. In tali circostanze le vedute di paesaggi riescono di una evidenza senza pari.

Sarebbe dunque desiderabile che i fabbricatori di stereoscopi adottassero un valore fisso di f ed una distanza fissa $2l$ delle lenti, e che la distanza fra queste e le figure o fotografie fosse ancora f. Un osservatore miope non dovrebbe variare la distanza fra le lenti ed i disegni, ma correggere con occhiali il proprio difetto. D'altra parte bisognerebbe che i fabbricatori di vedute stereoscopiche si persuadessero ad adoperare macchine fotografiche i cui obbiettivi distino fra loro esattamente della distanza che esiste fra i due occhi (che poco varia nei diversi individui adulti), e che i detti obbiettivi avessero una distanza focale eguale precisamente ad f. La lastra sensibile verrà posta alla distanza f dagli obbiettivi, giacchè per un paesaggio, esclusi gli oggetti vicinissimi, e specialmente colle macchine moderne da istantanee, tutta l'immagine riescirà così abbastanza in fuoco.

Infine nell'applicare al cartone le due fotografie non bisognerebbe, come quasi sempre sino ad ora, procedere a caso, ma collocarle in modo che le due immagini di un punto infinitamente lontano siano ad una distanza reciproca eguale a $2d+2a$, e cioè eguale precisamente a $2l$, distanza fra i centri delle lenti dello stereoscopio.

Se queste norme fossero generalmente adottate, una qualunque fotografia messa in un qualunque stereoscopio darebbe

una visione esatta dell'oggetto rappresentato, e cioè con dimensioni e distanze eguali al vero. Bisogna guardare un paesaggio nello stereoscopio in condizioni tali che le (7) sieno soddisfatte, per persuadersi di quanto è grande l'evidenza che così si ottiene, in confronto dell'effetto che generalmente si ha con una fotografia stereoscopica del commercio guardata con uno stereoscopio preso a caso.

Il caso di un oggetto di dimensioni limitate, come un gruppo di persone, una macchina etc., merita d'essere considerato a parte. In questo caso, piuttosto che obbligare gli occhi ad accomodarsi per l'infinito mentre guardano nello stereoscopio, è naturalmente vantaggioso, come si è già notato, fare in modo che la loro accomodazione sia quella che corrisponde alla distanza alla quale apparisce un punto medio dell'oggetto rappresentato. Oltre che le condizioni (7) bisognerà che sia soddisfatta questa altra, e cioè che l'immagine virtuale d'una delle due prospettive data dalla relativa lente dello stereoscopio si formi ad una distanza B dall'osservatore eguale alla distanza alla quale deve apparire l'oggetto.

Supponiamo che si tratti ancora di fotografie stereoscopiche e trascuriamo ω per semplicità, nel qual caso la seconda delle (7) si riduce a $b_1 = b$, e sia F la distanza focale degli obbiettivi fotografici. Si avrà:

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{B}=\frac{1}{F}, \quad \frac{1}{b}-\frac{1}{B}=\frac{1}{f},$$

da cui:

$$2Ff = B(f-F).$$

Si potrà quindi, data la distanza B scegliere F in modo che questa relazione sia soddisfatta, o viceversa.

Praticamente esiste però un'altra condizione da soddisfare, relativa alla dimensione che devono avere le immagini fotografiche. Si voglia per esempio che il rapporto fra la grandezza dell'oggetto e quella della sua fotografia sia n. Sarà allora $B = nb$. Con questa e le due precedenti relazioni si determineranno b,B ed F. Si trova:

$$b = f\frac{n-1}{n}, \quad B = f(n-1) \quad F = f\frac{n-1}{n+1}.$$

La prima di queste tre relazioni fa conoscere a qual distanza devono porsi dalle lenti dello stereoscopio le due fotografie coniugate; la seconda determina la distanza dell' oggetto da fotografare dagli obbiettivi; la terza la distanza focale che questi ultimi devono possedere.

Se venissero generalmente adottate le regole esposte più sopra circa la costruzione degli stereoscopi da porsi in commercio, per servirsi di questi istrumenti anche pel caso attuale, bisognerebbe che in essi potesse variarsi la distanza fra le lenti e le fotografie, onde ridurre questa distanza al valore $b = f - \frac{f}{n}$. Esistono del resto di già stereoscopi a lenti mobili in questa maniera.

Vediamo per ultimo quali modificazioni presenta l' oggetto che apparisce nello stereoscopio in confronto dell' oggetto reale quando, come avviene d' ordinario, le condizioni (7) non siano soddisfatte, e lo sia solo qualcuna di esse. Consideriamo solo i casi principali seguenti.

a) Se delle (7) sono soddisfatte le due prime ma non la terza, vale a dire se la distanza reciproca delle due prospettive non ha quel valore che rende $K = 0$, si trae dalle (5):

$$\frac{X}{X_0} = \frac{Y}{Y_0} = \frac{Z}{Z_0}, \quad \frac{1}{Y_0} - \frac{1}{Y} = -\frac{1}{\phi},$$

dove si è posto $\phi = \frac{bdf}{K}$. L' oggetto apparente è dunque (come del resto fu già dimostrato da Helmholtz in un caso analogo) eguale all' immagine virtuale che dell' oggetto vero potrebbe fornire una lente divergente di distanza focale ϕ posta all' origine delle coordinate.

b). Supponiamo soddisfatte la prima e terza delle (7) ma non la seconda; in altre parole la distanza fra le due prospettive e le lenti dello stereoscopio non ha il valore dovuto onde si abbia la visione esatta dell' oggetto rappresentato. Le (5) divengono:

$$X = X_0, \quad Y = Y_0 \frac{b_1 f - b_1 \omega + f\omega}{bf}, \quad Z = Z_0.$$

Le dimensioni dell' oggetto apparente nei vari piani verticali paralleli a quello delle prospettive sono dunque esatte; ma le distanze di questi piani dall' osservatore, e quindi anche il rilievo, sono ridotti in un certo rapporto, che diviene $\frac{b_1}{b}$ quando si supponga ω trascurabile.

c). Supponiamo infine soddisfatta la terza delle (7), ma che non lo sia la prima, e che invece della seconda si abbia $d(bf - b_1\omega + f\omega) = bdf$. Le (5) divengono $\frac{X}{X_0} = \frac{Y}{Y_0} = \frac{Z}{Z_0} = \frac{d}{D}$.

L' oggetto apparente è dunque in tal caso simile all'oggetto reale e similmente posto. Se, come d' ordinario, $D > d$, invece dell' oggetto reale ne apparisce uno in iscala ridotta. Come si è notato, si suol fare $D > d$, per ottenere più marcate le differenze fra le due immagini coniugate; anzi, se inoltre si dà ad a un valore superiore a quello che soddisfa la terza delle (7), si ottiene un effetto di telestereoscopio, e cioè mentre un certo piano verticale dell' oggetto apparisce nella sua vera posizione, tutti gli altri si mostrano più staccati, donde esagerazione del rilievo. In tal caso neppure le proporzioni giuste sono conservate.

In conclusione, non si avrà una rappresentazione stereoscopica esatta che quando siano in pari tempo soddisfatte le tre relazioni (7). Mancando alla prima di esse, per esempio facendo $D > d$, si otterrà generalmente una rappresentazione in scala ridotta.

Alcune delle proprietà qui dimostrate sono implicitamente contenute in una Memoria nella quale si tratta della teoria del mio Polistereoscopio [1]). Ma ho creduto bene raccogliere e completare la teoria dello stereoscopio, ora che la fotografia istantanea lo rimette in voga, e più ancora in vista della importanza che esso è destinato a conquistare, sia per offrire la visione esatta di luoghi e di persone, sia per la perfetta riproduzione visuale di figure geometriche a tre dimensioni [2]), di macchine, apparecchi ecc.

1) " *Sulla visione stereoscopica* „ *N. Cimento*, serie 2, vol. XIV, 1875.

2) Così nelle tavole annesse ad una mia memoria del 1873 " *Sulla composizione dei moti vibratori* „ (*N. Cimento* sec. serie, t. IX), per mostrare la forma delle traiettorie che si ottengono componendo tre moti vibratori ortogonali, disegnai due prospettive di ogni curva; dalla loro fusione stereoscopica si ha la percezione della traiettoria col giusto rilievo.

RIVISTA

SUNTI di A. BARTORELLI.

Comptes rendus. — *Primo semestre* 1892.

3, 4. — CH. ANTOINE. *Sull' equazione caratteristica del vapor d' acqua.* — L' A. ricorda che Hirn racchiudeva sotto un volume costante del vapor d' acqua, saturato sotto diverse tensioni, soprariscaldava questo vapore e osservava le tensioni H in colonne d' acqua a 4°. Servendosi dei resultati numerici delle esperienze di Hirn l' A. dimostra in questa Nota che il peso π del metro cubo di vapor d' acqua, alla temperatura t e sotto la pressione H, è dato dalla relazione

$$\pi = \frac{19{,}9\,H}{278 - 0{,}365\,\theta + t},$$

in cui θ indica la temperatura del vapore saturo sotto la pressione H.

H. PELLAT. *Osservazioni intorno alle esperienze di* Gouy *sulle differenze di potenziale al contatto.* — L' A. prende in esame i resultati delle esperienze fatte dal Gouy sull' argomento delle differenze di potenziale al contatto fra il mercurio e le amalgame, e da esso esposte in una precedente Nota (*Comptes rendus* tomo CXIV, pag. 22, anno 1892), e contesta la legittimità delle conclusioni alle quali il Gouy stesso ha creduto di poter pervenire.

A. PEROT. *Sulle oscillazioni di* Hertz. — In un lavoro recente v. Bjerknes [1]) ha dimostrato che le oscillazioni di forza elettromotrice prodotte intorno a fili conduttori col metodo di Hertz possono essere rappresentate dall' espressione

$$Y = Ae^{-\alpha(t-\theta)} \operatorname{sen} \pi \left(\frac{t}{\tau} - \phi\right).$$

L' A. espone in questa Nota i resultati di ricerche analoghe, fatte però con un eccitatore differente da quello impiegato dal Bjerknes, cioè con quello di cui si è servito il Blondlot [2]) nelle sue recenti ricerche, leggermente modificato. Nell' apparecchio dell' A. le oscillazioni si propagano attorno ai fili di un circuito *completamente chiuso* che comprende le parti seguenti: la regione dove nascono le oscillazioni, che è un filo di rame, di 8 m. circa

1) *Archives des Sciences physiques et naturelles,* t. XXVI, pag. 227; e *Ann. di Wiedemann,* XLIV, pag. 74 e 92.

2) *Journal de Physique,* t. X., 2. serie, pag. 549.

di lunghezza, teso orizzontalmente; un ponte mobile che unisce questo filo ad un altro teso parallelamente a 10 cm. di distanza; un filo di ferro fine di 80 m. circa di lunghezza, riunisce questo secondo filo di rame alla regione dove si producono le oscillazioni. Per tal modo le onde di forza elettromotrice contrarie che partono dall'eccitatore e si propagano lungo questo circuito nei due sensi interferiscono nel filo di ferro e non nei fili di rame che costituiscono la linea, in causa del rapido smorzamento delle oscillazioni dapprima, e poi per l'indebolimento con la distanza percorsa. Due punti A e B della linea, situati dicontro, sono riuniti ai morsetti di un micrometro a scintille che dà il mezzo millesimo di millimetro. Il ponte essendo in una posizione qualunque e non scoccando scintille al micrometro, l'A. avvicinava la punta mobile di questo al relativo dischetto in modo da ottenere un flusso continuo di scintille: la distanza esplosiva misura in queste condizioni, secondo Warren de la Rue e Müller, il quadrato della differenza massima di potenziale fra i due punti A e B; facendo variare la posizione del ponte, si costata che questa distanza esplosiva d varia con la distanza a dei punti A e B contata secondo i fili di linea; si può dunque costruire per punti la curva $d = f(a)$.

L'A. riporta in questa Nota una delle varie curve ottenute, che ha un'andatura regolarissima e presenta dei massimi decrescenti e dei minimi crescenti, equidistanti fra loro.

Questa curva coincide sensibilmente con quella che si calcola supponendo le forze elettromotrici Y_1 in B e Y_2 in A espresse dalle formole

$$Y_1 = \phi(t) = Ce^{-\alpha t} \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{\tau}, \qquad Y_2 = \phi\left(t + \frac{a}{V}\right),$$

e d proporzionale al valor massimo di $(Y_1 - Y_2)^2$; e perciò l'A. conclude che la formola proposta rappresenta bene l'esperienza.

La forza elettromotrice è *pendolare semplice smorzata*, e non corrisponde ad un suono complesso, lo smorzamento è rapidissimo perchè durante il quarto periodo la forza elettromotrice non è che il decimo del valore iniziale.

Collo stesso apparecchio poi l'A. ha potuto eccitare dei risonatori e misurare la loro lunghezza d'onda, ed esso ritiene che in queste esperienze il fenomeno, cui è stato dato il nome di *risonanza multipla*, non possa spiegarsi in modo diverso da quello indicato dal Poincaré.

A. Broca. *Sull'aplanetismo.* — Quando è dato un sistema centrato di rivoluzione e un raggio incidente che parte da un

punto del suo asse, il coniugato di questo raggio rispetto al sistema totale taglia l'asse in un punto che dipende da due elementi, cioè dal punto da cui parte il raggio incidente, e dal punto in cui questo incontra la prima superficie. Questo secondo punto può essere anche definito dall'angolo ω_1 che il raggio incidente fa con l'asse. Per valori di ω_1 molto piccoli si potrà sviluppare la distanza dell'immagine da un punto fisso secondo le potenze crescenti di ω_1. Se i due primi termini che contengono ω_1 sono $A\omega_1^n + B\omega_1^{n+r}$ è facile dimostrare che, l'aberrazione essendo in generale dell'ordine ω_1^n, vi è un numero limitato di punti reali o immaginari situati sull'asse del sistema e tali che l'aberrazione vi sia dell'ordine di ω_1^{n+r}. In questi punti l'aberrazione cambia di segno. Per i sistemi sferici si vede che $n = r = 2$, dunque che vi sono dei punti reali o immaginari nei quali l'aberrazione è dell'ordine ω^4.

La conoscenza di questi punti è importantissima; se infatti il punto utile di uno strumento coincide con uno di questi punti si avrà un resultato soddisfacente. Se ciò non accade si può comporre il sistema totale di due sistemi parziali che compensino in parte le loro aberrazioni. Ripetendo più volte questa operazione l'analisi dimostra che si può arrivare a rendere le aberrazioni così sferiche che cromatiche tanto piccole quanto si vuole. Ma la soluzione analitica del problema è impossibile, e la complicazione degli strumenti è una grave difficoltà.

L'A. allo scopo di tentare di semplificare gli strumenti indica in questa Nota un metodo per costruire delle lenti a punti aplanetici determinati, limitando lo studio alla lente crown-flint; e si propone di trarre da questo studio delle conclusioni pratiche dopo avere studiato l'acromatismo delle lenti grosse.

5. — E. GRIMAUX. *Sull' apparecchio di Lavoisier e Laplace per la misura della dilatazione lineare dei solidi.* — L'A. ha trovato le incisioni in rame che rappresentano l'apparecchio usato da Lavoisier e Laplace per misurare la dilatazione lineare dei solidi. L'apparecchio era stato descritto dai due fisici, con richiami ad un disegno mai pubblicato e finora sconosciuto; è sembrato perciò all'A. che avesse un interesse storico la pubblicazione di questo disegno.

H. GILBAULT. *Sulla compressibilità delle soluzioni saline.* — Durante un lavoro precedentemente pubblicato, sulla variazione della forza elettromotrice delle pile con la pressione, l'A. è stato portato a occuparsi della compressibilità delle soluzioni saline. Con un metodo che, salva qualche modificazione, è simile a quello tenuto dal Cailletet per una ricerca analoga, e ponendo ogni cura per liberarsi dalle cause d'errore, l'A. è giunto a stabilire una

serie di leggi, che la brevità dello spazio non ci consente di qui riportare. Queste leggi mostrano la dipendenza della compressibilità delle soluzioni saline dalla loro concentrazione.

Gouy. *Sui fenomeni elettrocapillari.* — Dallo studio comparativo delle amalgame e del mercurio in riguardo ai fenomeni elettrocapillari (*Comptes rendus*, 4 Gennaio 1892) l' A. è passato a studiare la legge di questi fenomeni col mercurio puro e con soluzioni diverse ed ha trovato che questa legge resta, come ha mostrato il Lippmann, sensibilmente la stessa in molti casi, ma soltanto per una certa categoria di elettroliti.

L' A. distingue nella curva che rappresenta le altezze del menisco di un elettrometro capillare in funzione della differenza di potenziale la parte *anodica* e la *catodica*; chiamando così i lati della curva che terminano ai punti in cui, avendo luogo l' elettrolisi, il menisco capillare fa l' ufficio di anode o di catode; dimodochè il lato catodico corrisponde alle forti polarizzazioni con l' idrogeno. Fatta questa distinzione, egli trova che sostituendo nell' elettrometro alla soluzione di acido solforico delle soluzioni di ioduri, bromuri, cloruri, solfuri, solfocianuri ecc. si hanno delle curve che permettono di giungere alle conclusioni seguenti:

1° Le curve sono poco differenti per gli ioduri e l' acido iodidrico, per i bromuri e per l' acido bromidrico e così per gli altri sali; dimodochè esse dipendono principalmente dall' elemento elettro-negativo. Le basi, gli acidi ossigenati e i loro sali mostrano delle differenze meno importanti, ed obbediscono approssimativamente alla legge di Lippmann.

2° Si possono far coincidere i lati catodici delle curve con una traslazione parallela all' asse delle ascisse, eccetto che per le soluzioni molto concentrate, nelle quali si osserva qualche variazione d' ordine secondario.

L' A. ha studiato poi le curve ottenute collocando nell' elettrometro due soluzioni, per es. una di potassa a $^1/_{10}$ che bagni il mercurio inferiore, l' altra di ioduro, bromuro, cloruro, solfuro o solfocianuro ad $^1/_{100}$ che sia in contatto col menisco, e ne ha concluso che il fattore predominante nelle variazioni della tensione superficiale è la *tendenza all' elettrolisi.*

Le Chatelier. *Sulla misura ottica delle temperature elevate.* — L' A. dà un cenno di un metodo fotometrico per misurare le temperature elevate, p. es. quelle dei forni a riverbero, metodo da sostituire a quello delle coppie termoelettriche sia per la sua gran sensibilità che per la sua sicurezza.

A. Broca. *Sull' acromatismo.* — In questa Nota l' A. fa una teoria dell' acromatismo delle lenti, la quale unita con la teoria

dell' aplanetismo fatta precedentemente dimostra come si possano usare le lenti grosse come oculari, e come si possa nel microscopio ottenere l' ingrandimento coll' oculare anzichè coll' obiettivo.

6. — R. Blondlot. *Sopra un nuovo processo per trasmettere delle ondulazioni elettriche lungo fili metallici, e sopra una nuova disposizione del ricevitore.* — L' A. descrive in questa Nota il dispositivo da lui impiegato, in sostituzione di quello di Hertz per produrre delle ondulazioni elettriche e per trasmetterle lungo fili metallici. In questo dispositivo il circuito primario o eccitatore è costituito da un condensatore formato di due armature circolari di 12 cm. di diametro e distanti fra loro di 1 cm. al più, alle quali sono saldati due fili di rame di 3 mm. di diametro, terminati da due sfere, e curvati in modo che ciascuno d'essi formi un po' meno della metà di una circonferenza di 2 m. di diametro. Le due sfere sono unite per mezzo di due fili ai poli di un rocchetto di induzione. Il circuito secondario è formato da un filo di rame curvato in modo da formare un cerchio col diametro inferiore di 1 cm. a quello del circuito primario; esso è convenientemente isolato ed ha i suoi estremi in corrispondenza delle sfere del primario. Fra questi estremi scoccano delle scintille che in certi casi sono più lunghe di quelle del circuito primario; l' A. ne ha ottenute della lunghezza di 11 mm.

Per trasmettere le ondulazioni l' A. salda alle estremità del circuito secondario due fili di rame che tende parallelamente; fra questi fili poi colloca il risonatore.

Il vantaggio principale di questo dispositivo è di fare sparire le scariche elettrostatiche che danno nel dispositivo di Hertz i fili lungo i quali si trasmettono le onde; altro vantaggio poi è quello di poter cambiare il periodo dell' eccitatore col solo cambiamento di distanza delle armature del condensatore.

L' A. osserva poi che la forma circolare data all' eccitatore e in conseguenza al secondario non è necessaria; essa può essere anche rettangolare e le cose procedono ugualmente bene.

J. Chappuis. *Rifrazione dei gas liquefatti.* — L' A. espone in questa Nota il principio del metodo da lui impiegato in sostituzione di quello del duca di Chaulnes per misurare gli indici di rifrazione dei gas liquefatti. Il principio consiste in questo: se due prismi a spigoli paralleli sono riuniti in senso contrario per una delle loro facce ed hanno gli angoli A_1 A_2 e gli indici n_1 ed n_2 per il raggio D e se *il raggio incidente e il raggio emergente che traversano questo sistema sono rispettivamente normali alle facce di entrata e di uscita* allora queste quattro quantità soddisferanno alla relazione

$$n_1 \operatorname{sen} A_1 = n_2 \operatorname{sen} A_2 .$$

Immaginando che il primo prisma sia formato dal liquido da studiare, di indice n_1 e che il secondo sia un prisma di vetro di indice noto n_2, il cui angolo rifrangente sia variabile e misurabile, questo sistema permetterà di realizzare le condizioni enunciate e di calcolare n_1 per mezzo della formola precedente.

L' A. dimostra che questo metodo può avere un grado di sensibilità assai maggiore dell' altro. Esso descrive quindi nei suoi particolari l' apparecchio adoperato e promette di riportare in un' altra memoria i dettagli delle operazioni eseguite. Riporta intanto i risultati trovati per l' acido solforoso e per il cloruro di metile, a zero gradi e sottto la tensione massima del loro vapore, che sono rispettivamente 1,3518 e 0,3533 per il raggio D.

E. Carvallo. *Poteri rotatori dei raggi calorifici oscuri del quarzo.* — In una Nota recente (*Comptes rendus*, 14 Decembre 1891) l' A. aveva indicato come le equazioni di Helmholtz possono spiegare la polarizzazione rotatoria del quarzo. Dopo aver ritrovato con la teoria le leggi di Biot e di Cornu per una luce monocromatica, esso giungeva alla formola semplicissima di dispersione

$$\omega = \frac{An^2 - B}{\lambda^2}$$

dove ω, n, λ rappresentano il potere rotatorio, l' indice di rifrazione e la lunghezza d' onda di una medesima radiazione. Per le costanti A e B dava i valori $A = 11{,}90$, $B = 20{,}83$ che risultavano, col metodo d' interpolazione di Cauchy, dalle esperienze di Soret e Sarazin.

Dopo avere consultato la memoria originale di questi autori e avervi esaminato le numerose osservazioni ha rifatto il calcolo e trovato per quelle costanti dei valori più esatti $A = 11{,}976$, $B = 21{,}027$.

L' A. espone poi in questa Nota il confronto da lui proseguito fra la formola citata e i risultati dell' esperienze da lui fatte, con un metodo di cui accenna il principio, per i raggi calorifici oscuri. Egli osserva che le differenze fra l' osservazione e il calcolo hanno un carattere sistematico che non può essere attribuito agli errori sperimentali, ed accenna a dare del fatto qualche spiegazione ed alla necessità di tornare sull' argomento.

SUNTI di A. STEFANINI.

Elektrotech. Zeitschrift.

O. Frölich. *Sulla misura della resistenza delle pile.* (XII, pag. 370, 1891). — Nei fascicoli 12 e 19 dell' *Elektr. Zeits.* pel

1891, A. von Waltenhofen e F. Uppenborn hanno pubblicato dei metodi per determinare la resistenza interna delle pile, e dai resultati delle misure fatte con quei metodi si riconosce, come quella resistenza dipenda dalla intensità della corrente che attraversa la pila.

Il metodo del Waltenhofen consiste nel disporre la pila P da studiarsi in una derivazione presa sul circuito di un' altra pila e nel regolare da prima le resistenze metalliche in modo che nel circuito della pila P non si abbia corrente, e poi in modo che in esso circoli una corrente j_1'. Se j_3, j_3' sono le correnti che, nei due casi ora detti, circolano nel ramo che non contiene f. e. m., e la resistenza è w_3, il Waltenhofen trova per la resistenza della pila il valore

$$\beta = w_3 \frac{j_3 - j_3'}{j_1'} .$$

Col metodo di Uppenborn, invece di un solo elemento se ne adoprano 4 fra loro uguali, disposti due a due in opposizione nei 4 lati di un ponte di Wheatstone, mentre nelle due diagonali si hanno resistenze costanti, e si usano come nel metodo di Kohlrausch delle correnti indotte rapidamente alternanti.

Ora il Frölich mostra come con quei due metodi non si misuri la resistenza vera delle pile, ma un'altra quantità u che egli chiama « resistenza misurata » e che, come dimostrò altra volta (cfr. *N. Cim.* 23, pag. 189) dipende da quella vera w, dalla intensità j della corrente che circola nella pila e dalla sua f. e. m. e mediante la relazione

$$u = w_j - \frac{de}{dj} + dj \frac{dw}{dj} .$$

Tuttavia, se col metodo di Kohlrausch e coi suoi derivati non si può avere la resistenza vera della pila, è facile ottenerla col calcolo da quella misurata. Infatti, essendo

$$u = \frac{d\,(jw)}{dj}$$

e quindi

$$\int_0^j u\, dj = [jw]_0^j = jw_j$$

ossia

$$w_j = \frac{1}{j} \int_0^j u\, dj$$

se si costruisce una curva che rappresenti la dipendenza fra la resistenza misurata u e l'intensità j della corrente che attraversa la pila, si può ottenere per ogni punto di essa il valore di $\int_0^j u\,dj$ per mezzo delle quadrature meccaniche, e quindi si può avere il valore di w_j per ogni valore di j.

L'A. termina accennando ad una modificazione del Kohlrausch che permette di misurare la resistenza di un elemento o di una batteria, e di far variare la corrente, che circola in essi, con la maggior facilità; e invece dell'induttore dei seni di Kohlrausch raccomanda come assai più pratico l'uso di una piccola batteria, il cui circuito si apra e si chiuda rapidamente per mezzo di un interruttore a ruota. Così possono aversi rapidi impulsi sempre nello stesso senso; e se si vogliono correnti alternate basta introdurre un rocchetto d'induzione, e variare l'interruttore in modo da utilizzare direttamente una batteria divisa in due parti.

L. M. BAUMGARD. *Sulla generalizzazione del ponte di Wheatstone.* (XIII, pag. 61, 1892). — Si abbia in ciascun lato del ponte una f. e. m., e sieno indicati con gli indici 2,3 e 5,6 le due coppie di lati opposti, e si supponga che la corrente che la forza elettromotrice E_5 da per sè sola produrrebbe nella resistenza W_6 divenga nulla; allora, com'è noto, l'intensità complessiva della corrente in W_6 è indipendente dalla resistenza W_5. Ma la condizione perchè la E_5 di per sè dia una corrente nulla in W_6 non è altro che la condizione per l'ordinario ponte Wheatstone; e perciò anche per il ponte generalizzato, quando la corrente in W_6 sia costante, vale la relazione

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{W_3}{W_4}.$$

Questa non è dunque che una dimostrazione assai semplice della generalizzazione data dal Frölich al ponte di Wheatstone.

Wiener Anzeiger, 1891.

J. KLEMENCIC. *Sulla riflessione dei raggi di forza elettrica sulle lastre metalliche e di solfo.* — In queste ricerche l' A. si servì degli induttori secondari con gli elementi termoelettrici, che descrisse in una nota precedente (*N. Cim.* 28, pag. 269). Anche qui furono usati due induttori, uno dei quali serviva da campione. Fu determinata la riflessione che si presentava su una lastra di solfo delle dimensioni di $120 \times 80 \times 7$ cm., e su una di zinco della stessa superficie, ma più sottile, e a questo scopo l'A. si servì anche

di un reticolato di fili e di un disco di zinco. Le dimensioni delle lastre anzidette permettevano le misure soltanto per incidenze comprese fra 30 e 65°.

Fra la riflessione sullo solfo e quella sullo zinco v' è una differenza che corrisponde a quanto si ha per la luce. La intensità della riflessione è diversa a seconda della direzione delle vibrazioni. Sullo solfo si ha una riflessione sempre intensa per tutti gli angoli d' incidenza, se le vibrazioni sono normali al piano di incidenza. Se invece sono parallele al piano d' incidenza si ha una riflessione molto debole e soltanto per piccoli angoli d'incidenza; per un angolo di 65° non è possibile costatare alcuna riflessione. Questo concorda coi fenomeni ottici, perchè infatti lo solfo ha un angolo di polarizzazione compreso fra 60 e 65°. Quanto alla direzione delle vibrazioni della luce polarizzata, si deduce di qui quello stesso che fu trovato da Trouton (*Nature*, 29, pag. 391). Fu anche trovato che l' intensità delle vibrazioni trasmesse dallo solfo varia in modo inverso a quello delle vibrazioni riflesse.

H. PITSCH. *Sull' acromatismo.* — È noto che un doppio prisma acromatico, costruito per un dato angolo d' incidenza della luce, mostra effettivamente un buon acromatismo per una data posizione; ma l' angolo d' incidenza pel quale ciò avviene non coincide con quello il doppio prisma fu calcolato. I tentativi di Fraunhofer e di altri, per far coincider meglio il calcolo coll' esperienza, riuscirono soltanto in parte. L' A. cercò perciò di stabilire una teoria dell' acromatismo che si accordasse coll' esperienza, e giunse al resultato che l' acromatismo migliore si raggiunge quando i raggi contigui dei colori più intensi (secondo Fraunhofer della lunghezza d' onda 0,574) che erano paralleli, restano paralleli anche dopo la rifrazione. Il confronto coi resultati delle misure di Steinheil, Voit e Fraunhofer, mostra che questa teoria concorda infatti coll' esperienza.

Wied. Ann. d. Phys. u. Chem. Vol. XLIII, 1891.

O. E. MEYER. *Su un metodo per determinare l'attrito interno dei liquidi.*

K. MÜTZEL. *Sull'attrito interno dei liquidi.* — Il metodo proposto dal Mayer è analogo a quello di Coulomb, e consiste nel far oscillare un cilindro circolare retto ripieno del liquido da studiare. Il Mayer espone la teoria di questo metodo, e indica la formula cui si giunge per il coefficiente d' attrito. Il Mützel espone le esperienze che eseguì per la determinazione della dipendenza che può esservi fra i coefficienti d' attrito di un miscuglio di più soluzioni e quelli dei componenti del miscuglio, e

fra il coefficiente d'attrito di una soluzione e i suoi componenti, servendosi del metodo anzidetto. Egli trovò che i resultati sperimentali concordano con quelli dedotti dalla formula del Meyer. Nei miscugli, la media aritmetica dei coefficienti d'attrito dei componenti è maggiore del coefficiente d'attrito del miscuglio.

F. AUERBACH. *Misure assolute della durezza.* — Dopo aver esposto le ricerche che sono state eseguite fin qui per determinare la durezza dei corpi, l'A. espone la teoria di un nuovo metodo che elimina le incertezze degli antichi modi di misura, servendosi della nuova definizione della durezza data da H. Hertz nel 1882. Secondo Hertz la durezza di un corpo è il suo limite di elasticità pel contatto di una sua porzione piana con una superficie sferica di un altro corpo: e la sua misura è il valor limite della pressione normale, per unità di superficie, che produce una deformazione permanente.

L'A. ha immaginato un apparecchio per eseguire le misure assolute della durezza secondo questa definizione, e ne dà una dettagliata descrizione. Dalle sue misure sul vetro, e da quelle eseguite da Kowalski, si ha:

Tenacità del vetro in Cg/mm^2	
Per la trazione . .	8,8
» » flessione. .	8,8
» » torsione . .	10,1
» » compressione .	37,7
Durezza . . .	226

J. SCHUMANN. *Ricerche sulle amalgame.* — L'A. ha studiato le amalgame di 17 metalli, delle quali indica i modi di preparazione e le proprietà. Col metodo dilatometrico di Wiedemann, di tali amalgame egli ha studiato le variazioni di volume pel riscaldamento e pel raffreddamento, e da tali ricerche conclude che quelle amalgame non hanno un punto di liquefazione e di solidificazione ben definito, a motivo dei processi di cristallizzazione che si manifestano. Le amalgame solide consisterebbero cioè in una riunione di diverse modificazioni cristalline, che per una determinata temperatura sono in parte stabili e in parte instabili, e che si trasformano le une nelle altre a seconda delle circostanze.

P. DRUDE. *Sulla grandezza della sfera dell'azione molecolare, e sulla costituzione delle lamine liquide di* Plateau. — Dalla discussione delle ricerche fatte da molti sperimentatori su questo soggetto, e dalle esperienze proprie, l'A. giunge alle seguenti conclusioni:

1. Le parti nere di una lamina fatta col liquido di Plateau hanno un indice di refrazione, che è minore di un' unità della seconda decimale di quello delle parti colorate.

2. Lo spessore delle parti nere è costante, ed uguale a 17.10^{-6} mm.

3. La grandezza della sfera dell' azione molecolare è inferiore a $8,5.10^{-6}$ mm.

Per determinare lo spessore delle lamine liquide l' A. si servì di un metodo ottico, di cui espose la teoria in un' altra Nota.

Detto. *Sulla direzione delle vibrazioni nella luce polarizzata.* — Da prima l' A. fa osservare che le considerazioni del Poincarè sulle esperienze del Wiener (cfr. *N. Cim.* 29, pag. 262) rappresentano un caso speciale di quelle che egli espose in una sua Nota sulla riflessione e la rifrazione delle onde sonore piane (*Wied. Ann.* 41, pag. 154).

Quanto poi alle ragioni con le quali Cornu e Potier hanno cercato di dedurre dalle esperienze del Wiener che l' ipotesi di Fresnel è la sola ammissibile (cfr. *N. Cim.* 29, pag. 263 e 267) l' A. osserva che il ragionamento del Potier ripetuto anche dal Cornu, cioè che nella riflessione su uno specchio opaco che abbia il poter riflettente uguale a 1, l' intensità della luce trasmessa essendo nulla, l' ampiezza dell' onda riflessa deve essere uguale ed opposta a quella dell' onda incidente, dovrebbe valere anche per la riflessione su uno specchio trasparente dotato del poter riflettente 1. Questo caso si potrebbe immaginare realizzato, supponendo che la riflessione avvenisse alla superficie di separazione di due mezzi trasparenti, i cui indici di refrazione assoluti fossero molto diversi l' uno dall' altro. Allora, tanto che la riflessione avvenga sul mezzo più denso, quanto su quello meno denso, tutta la luce incidente è riflessa, e in ambedue i casi il segno delle ampiezze riflesse è, secondo ogni teoria, opposto. Se dunque il ragionamento del Potier fosse esatto per la riflessione sul mezzo più denso, sarebbe falso per quella sul mezzo meno denso. Nello stesso modo si può fare questa osservazione pel caso che la riflessione avvenga alla superficie di separazione di due mezzi, uno dei quali abbia un grandissimo potere assorbente.

C. Fromme. *Ricerche sperimentali sul magnetismo.* — Da alcune sue precedenti ricerche l' A. riteneva che il momento massimo PM del magnetismo residuo, che un pezzo di ferro, non magnetizzato, assumeva per la ripetuta azione di una medesima forza magnetizzante P, non potesse essere nè aumentato nè diminuito per mezzo di forze magnetizzanti inferiori a P ed aventi

la medesima direzione; ma nuove esperienze gli hanno mostrato che ciò non è esatto.

Infatti, magnetizzando prima a saturazione, colla corrente di 1A, un fascio di fili di ferro, p. es., contenuti in un rocchetto, e facendo poi variare l'intensità della corrente magnetizzante per mezzo di resistenze introdotte nel suo circuito, le forze magnetizzanti successivamente adoperate, inferiori sempre a quella iniziale, e sempre diminuenti, producono da prima un aumento di PM fino a un massimo, poi un ritorno a zero e una diminuzione fino a un massimo negativo, finalmente un nuovo aumento. La forza che corrisponde all'aumento nullo, cioè che non varia il valore di PM, è chiamata dall' A. forza neutra.

In seguito, la prima magnetizzazione fu prodotta non più colla corrente di 1 A ma questa fu fatta crescere continuamente cominciando da 0,07 A, e fu studiata in ciascun caso l'azione di forze più deboli. Fu così trovato, che quella forza cui corrisponde il massimo aumento positivo di PM, cresce al crescere di PM; mentre non si può costatare uno spostamento nè della forza neutra, nè di quella cui corrisponde il massimo aumento negativo.

Se il valore di PM per un fascio di fili non cresce più al ripetersi della prima forza magnetizzante, cioè se quel fascio è magnetizzato, da quella forza, a saturazione, una forza magnetizzante inferiore che si faccia agire successivamante può aumentarlo di 1,6 °/₀; resultato che sembra affatto paradossale.

Se le forze magnetizzanti si fanno succedere a piccoli intervalli, i successivi impulsi hanno sempre azione minore dei precedenti.

In generale l'azione di una forza π è minore, se l' ha preceduta una forza diversa p. Soltanto in vicinanza della forza neutra può accadere anche l' opposto, analogamente a ciò che si osserva per la ripetuta azione di una medesima forza. Se p è uguale alla forza neutra corrispondente a P, una forza π che agisca dopo ha minore influenza, cioè il momento residuo dopo l'azione di p non è aumentato, ma è divenuto più stabile, specialmente rispetto a forze che tendano a diminuirlo. Magnetizzando con forze p gradatamente diminuenti, il momento residuo può raggiungere un tale stato, che, quantunque sorpassi del 2,7 °/₀ il valore corrispondente alla saturazione, non risenta più alcuna variazione per effetto di forze minori.

Alla fine di questa Nota l' A. accenna anche ad una dipendenza fra la forma dei pezzi di ferro e l'azione delle piccole forze; ma non ha ottenuto a questo proposito resultati definitivi.

P. Sack. *Sulla determinazione del massimo della conduttività delle soluzioni molto diluite di solfato di rame.* — Secondo la teo-

ria di Arrenius, la conduttività degli elettroliti ad una data temperatura dovrebbe avere un massimo. Per gli acidi ipofosforico e fosforico tal massimo è a 54° e a 74° resp. come egli trovò con le sue esperienze. L'A. ha studiato a questo riguardo tre soluzioni molto diluite (dal 0,642 al 0,321 %) di solfato di rame, e ne trovò i massimi della conduttività fra 96 e 94°

J. ELSTER e H. GEITEL. *Sulla dipendenza della dispersione dell' elettricità, prodotta dalla luce, dalla natura della superficie illuminata.* — Da precedenti esperienze degli A. e di altri resulta che quanto alla proprietà di disperder la carica elettrica nell'atmosfera se sono illuminati dalla luce solare, i corpi si dispongono in una serie identica a quella che si chiama la serie del Volta.

Sperimentando con una lampada a petrolio, o con una di Bunsen resa oscura o illuminandola con diversi sali volatili, e confrontando l'azione di tali fiamme con quella dei diversi colori dello spettro solare, gli A. giungono a questa conclusione: I metalli che sono sensibili all' azione fotoelettrica si dispongono, per la loro sensibilità nell' ordine seguente: Potassio puro, lega di potassio e sodio, sodio puro, e quindi le amalgame di Rb, K, Na Li, Mg, (Tl, Zn). Quanto più un metallo è prossimo al primo della serie, tanto maggiore è la lunghezza d' onda della luce che basta a provocare la scarica della sua elettricità. Tuttavia anche pel potassio il massimo della sensibilità si ha per luce bleu.

Per le sostanze sopra indicate non fu costatata alcuna dispersione della carica positiva sotto l' azione dei raggi luminosi.

F. STREINTZ. *Contribuzione alla teoria degli accumulatori secondari.* — In questa Nota l' A. si occupa della capacità e del rendimento degli accumulatori. Egli ha trovato che la capacità, cioè il numero dei watt-ore che un accumulatore è in grado di restituire fino a una certa diminuzione, per es. il 10 %, della intensità iniziale della corrente, aumenta al diminuire della intensità della corrente. Il rendimehto che fu fra 0,77 e 0,94, aumenta parimente al diminuire della intensità della corrente. Una diminuzione della lastra positiva determina poi a parità di rendimento, un aumento della capacità.

C. FROMME. *Ricerche sperimentali sul magnetismo.* — Continuando i suoi studi sul magnetismo, l' A. tratta della diminuzione del momento residuo P M col tempo, e per l' azione di forze contrarie.

Un momento P M che sia superiore a quello normale, e ottenuto con piccole forze magnetizzanti, non cambia, col tempo, in modo diverso del momento normale.

Una forza smagnetizzante può agire o direttamente sul mo-

mento normale, oppure dopo che su di esso ha agito la forza neutra π (cfr. sopra, pag. 276).

Se la forza neutra π agisce prima di quelle contrarie, la diminuzione di PM è minore di quella che si ha senza che tal forza π abbia agito; e parimente è minore il momento totale indotto dalle forze contrarie, mentre il momento temporario risente pochissima variazione.

Se dopo la forza P agisce un' altra p minore della forza neutra π, che porti il valore di PM ad essere $PM \pm \delta PM$, questo da una forza contraria è diminuito meno di quello che non sia il momento PM.

Gli scotimenti durante o avanti l' azione di una forza minore di P non hanno azione, o l' hanno debolissima, sul valore di PM.

Per spiegare tali fenomeni l' A. ritiene che se su un corpo magnetico agiscono molte forze fra loro diverse, ciascuna di esse faccia cambiare, se non la grandezza, almeno lo stato del momento residuo; ossia, nel linguaggio della teoria dei magneti elementari girevoli: che ogni rotazione temporaria dei magneti molecolari produca una variazione nelle loro posizioni di equilibrio permanente, ciò che non implica la necessità di un cambiamento nel valore del momento residuo.

Se un pezzo di ferro è già saturato al valore PM, e si sottopone ad una forza maggiore, il valore di PM non cambia, ma cambia il suo stato; cioè la disposizione dei magneti elementari è diversa, e perciò ora anche una forza più piccola può aumentare PM. La forza neutra lascia PM costante, ma dà essa pure un'altra disposizione ai magneti elementari. Ne segue che una forza più piccola, che agisca dopo una più intensa, conduce i magneti elementari in una posizione d' equilibrio, dalla quale possono poi meno facilmente esser tolti, sia temporariamente, sia permanentemente. Questa specie di variazione nello stato del magnete potrebbe consistere in ciò, che gli assi dei magneti elementari sieno resi sempre più paralleli dall' azione di piccole forze.

H. Jahn. *Sulla rotazione elettromagnetica del piano di polarizzazione della luce nei liquidi, specialmente nelle soluzioni saline.* — Fra i due nicol di un polarimetro a penombra di Laurent, si trova una spirale di filo di rame, composta di 6360 spire, che è avvolta su un tubo di vetro lungo 80 cm. destinato a ricevere il liquido da studiarsi. La luce adoperata è quella gialla, ottenuta col bromuro di sodio.

Com' era stato indicato da G. Wiedemann, l' A. ha trovato che la rotazione del piano di polarizzazione è proporzionale all'intensità della corrente che circola nella spirale. Di più resulta che la rotazione specifica di una sostanza disciolta si può calco-

lare con grande approssimazione dalla rotazione della sua soluzione, la quale è indipendente dalla natura chimica del solvente.

Per i cloruri, bromuri, ioduri, nitrati e carbonati dei diversi metalli le rotazioni prodotte da quantità equivalenti del medesimo sale, sono quasi tutte uguali fra loro. Ma la rotazione dei bromuri è circa il doppio, quella degli ioduri circa quattro volte maggiore di quella dei cloruri. Per i solfati i valori differiscono assai da metallo a metallo.

Accompagna questa Nota una tavola in cui l'A. raccoglie le costanti di refrazione dei numerosi sali di cui ha studiato le proprietà elettromagnetiche.

A. Heydweiller. *Sul passaggio dell' elettricità nei gas.* — La presenza di un' interruzione a scintilla nella scarica di un condensatore non dovrebbe avere, secondo il Kirchhoff, alcuna influenza; ma l' A. mostra come l' ipotesi del Kirchhoff non sia confermata dai fatti, e come invece quella interruzione possa avere una notevole influenza sui fenomeni della scarica. Egli ha eseguito delle misure assolute sulle grandezze che si presentano in tali fenomeni; ma non è possibile dare un breve cenno delle esperienze eseguite, e si riportano qui soltanto le conclusioni cui è giunto l' A., e che sono le seguenti:

Le quantità di elettricità che si scaricano, e le cariche residue, per qualunque resistenza del circuito di scarica sono proporzionali alle capacità, e le quantità di elettricità che si scaricano al crescere della resistenza diminuiscono fino ad annullarsi.

Le cariche residue q_1 sono proporzionali alle radici quadrate delle resistenze del circuito; quindi la quantità $K = q_1^2 / 4c^2 r$ per ogni data distanza esplosiva è una costante indipendente dalla capacità c e dalla resistenza r.

Il lavoro nell' interruzione a scintilla è approssimativamente proporzionale alla durata della scarica e indipendente dall'intensità della corrente.

La costante k sopra detta è pressochè uguale al lavoro speso nella scintilla per ogni unità di tempo.

La resistenza di piccole interruzioni a scintilla (di alcuni mm. di lunghezza) non è molto maggiore di 10 a 10^2 ohm.

L' azione principale della interruzione a scintilla sulla scarica non devesi quindi attribuire alla sua resistenza, ma ad un lavoro indipendente dall' intensità della corrente e quasi costante, che forse è necessario per mantenere la differenza di potenziale cui è dovuta la scarica.

L' equazione differenziale che si può stabilire per la scarica esplosiva del condensatore, non si può per ora integrare; ma

le conseguenze che da essa si deducono sono confermate dall'esperienza.

E. Cohn e F. Heerwagen. *Sul periodo delle vibrazioni elettriche rapidissime.* — È noto che secondo Hertz la velocità V di propagazione delle onde elettriche nell'aria sarebbe diversa da quella V' che le medesime onde hanno nei fili metallici; mentre secondo il Lecher sarebbe $V = V'$. Ora gli A. mostrano che questo resultato del Lecher è dovuto puramente al caso, perchè usando il medesimo metodo del Lecher (*N. Cim.* 28, pag. 84), ma cambiando le condizioni sperimentali, si possono avere per V' valori diversissimi. La conclusione diversa cui giunse il Lecher è dovuta all'aver ammesso una intensità della corrente costante in tutto il circuito, come si richiede per l'applicazione della formula indicata dal Thomson per il calcolo del periodo delle oscillazioni della scarica dei condensatori, ciò che nelle esperienze di Hertz non è ammissibile, e per di più all'uso di una formula non esatta per il calcolo del coefficiente d'autoinduzione.

F. Kolacek. *Sulla teoria delle vibrazioni elettriche.* — La dimostrazione del teorema che le onde elettriche si propagano con la velocità della luce richiede, dopo le esperienze di Hertz, la determinazione della durata di oscillazione. Ora questa si deduce mediante una formula che fu ottenuta da un principio affatto opposto a quello dell'azione a distanza, ed è questionabile, come lo ha rilevato anche l'Hertz, se tal formula, ancora ammissibile per le oscillazioni delle batterie, sia applicabile ai risonatori usati nelle esperienze recenti. Ma anche astraendo da tutto questo, l'uso di quella formula sarebbe illusorio, se con essa si volesse determinare il periodo di un risonatore rettilineo senza capacità terminali come si usa nelle esperienze cogli specchi concavi.

L'A. ha perciò stabilito, in questa Nota, la teoria di un tal vibratore, la cui materia è supposta di una conduttività infinita, partendo dalle equazioni del Maxwell.

H. Kayser e C. Runge. *Sugli spettri degli elementi del secondo gruppo di* Mendelejeff. — Con lo stesso metodo usato per gli spettri degli alcali (*N. Cim.* 30, pag. 86) gli A. hanno determinato le lunghezze d'onda delle righe luminose negli spettri degli elementi Mg, Co, Sr, Zn, Cd e Hg che appartengono al secondo gruppo di Mendelejeff, e dànno in questa Nota, in diverse tabelle, le misure eseguite. Per questi elementi non valgono peraltro le relazioni trovate per gli alcali.

W. Voigt. *Sulla teoria della luce.* — Di questa Nota non è possibile accennare altro che il sommario, che ne mostra, del resto, l'importanza. Nel 1° cap., facendo a meno di un'ipotesi restrittiva che prima si ammetteva, viene stabilita la forma più generale delle

forze ammissibili nei fenomeni luminosi, che si presta a dare forme generalissime alle leggi della dispersione. Nel 2° queste forze son sottoposte alla condizione che non possano in alcun modo produrre una compressione nell'etere, e quindi sono in modo naturale semplicizzate e specializzate. Nel 3° sono sviluppate le condizioni generali ai limiti. Nel 4° è mostrata la dipendenza fra le equazioni fondamentali di Fresnel e di Neumann e finalmente è svolta una comparazione fra i resultati dei tre primi capitoli e quelli delle teorie elettriche.

N. VON KLOBUKOW. *Esperienza da lezione, sull'azione dei colori complementari, e sui miscugli di sostanze colorate disciolte.* — Per mostrare tali azioni ad un numeroso uditorio l'A. adopra dei miscugli di soluzioni colorate, che differiscono molto nel peso specifico, in modo che il loro miscuglio non si effettui altro che per una forte agitazione, e che le singole soluzioni tornino poi a separarsi se si lasciano in riposo.

Per mostrare l'azione del miscuglio del rosso col verde, l'A. adopra una soluzione di verde aldeide nell'alcole amilico, e una soluzione di un sale di cobalto nell'acqua. È facile cogliere il punto, pel quale le proporzioni dei due colori, se fortemente agitati, diano la sensazione del bianco. Perchè il colore del miscuglio apparisca bianco deve esser fortemente illuminato, tenuto di fronte a un fondo nero, e lontano da oggetti bianchi.

Per l'azione del bleu e del giallo, l'A. adopra una soluzione di fenantran-chinone o di un altro derivato del chinone che sia solubile in alcole amilico, e una soluzione ammoniacale di un sale di rame nell'acqua. Il colore del miscuglio è verde, al contrario di ciò che avviene per i corrispondenti colori dello spettro.

Con una delle anzidette soluzioni gialle, e con un miscuglio di soluzioni di sali di rame e di cobalto che si assomigli al violetto dello spettro, si può ottenere il bianco: così il giallo e il violetto appariscono complementari, mentre quelli dello spettro non lo sono.

Queste esperienze riescono bene adoprando dei sottili tubi da saggio.

P. GLAN. *Spettrosaccarimetro.* — Quest'apparecchio si compone: di una fenditura, fortemente illuminata, che si trova nel foco principale di una lente acromatica, di un prisma polarizzante di Glan, che raccoglie la luce parallela e la polarizza linearmente, e di un diaframma circolare coperto per metà da una lamina sottile di quarzo normale all'asse. Questa lamina fa ruotare di pochi gradi il piano di polarizzazione della luce che l'attraversa. Il fascio luminoso attraversa di poi un tubo contenente la soluzione di zucchero, e quindi un secondo prisma polarizzante, gi-

revole attorno a un asse, e la cui rotazione si può valutare con un nonio fino a un centesimo di grado. Dopo, il fascio luminoso attraversa un prisma di flint, che produce lo spettro della fenditura; e questo spettro è riprodotto, da una lente acromatica, nel piano di una seconda fenditura, che lascia passare soltanto un colore, ed è osservato con una terza lente acromatica a corto foco. Poichè per ogni colore, la rotazione del piano di polarizzazione è diversa, e i piani di polarizzazione delle due metà del fascio, una delle quali ha attraversato la lamina di quarzo e l'altra no, fanno un piccolo angolo fra loro, queste due metà appariscono ugualmente illuminate, dopo aver attraversato il secondo prisma polarizzante, solamente se il piano di polarizzazione di questo divide per metà quell'angolo, o se è normale alla sua bissettrice. Quest'ultima posizione è la più conveniente, perchè il minimo spostamento da essa produce una gran differenza nell'intensità luminosa delle due metà del fascio.

La luce da usarsi deve esser molto intensa, e l'A. consiglia d'illuminare la fenditura con 4 lampade a petrolio la cui luce sia raccolta da un opportuno condensatore.

Questo saccarimetro ha il doppio vantaggio di essere indipendente dal colore della sostanza da studiarsi, rendendo così inutile la decolorazione delle soluzioni zuccherine, e di permettere una maggior precisione nelle misure, perchè queste posson farsi nel verde o nel bleu, pei quali colori lo zucchero e le altre soluzioni hanno un poter rotatorio molto maggiore che pel giallo.

Con opportune modificazioni, questo apparecchio può anche servire allo studio della polarizzazione circolare dei cristalli.

E. Lommel. *Calcolo dei colori dei miscugli.* — Dopo le note regole di Newton per trovare il colore di un miscuglio di sostanze colorate, anche Maxwell e Lord Rayleigh si occuparono di questo soggetto, partendo dal principio di Young che tre sieno i colori fondamentali.

Ora l'A. si è proposto questo problema: Se per ogni fenomeno luminoso l'intensità di ciascuna tinta omogenea è data in funzione della lunghezza d'onda, trovare delle formule che, per l'uso di una sorgente di luce bianca, rappresentino la lunghezza d'onda del colore del miscuglio, il suo grado di saturazione e la sua chiarezza, in funzione di quelle variabili che per ogni caso determinano la diversità del miscuglio dei colori.

Anche l'A. adopra il cerchio cromatico di Newton, sulla cui periferia suppone sviluppato lo " spettro ideale „ di Listing, nel quale i colori son disposti secondo le differenze dei loro numeri di vibrazione.

L'A. applica i suoi calcoli, che non si prestano ad un breve

riassunto, alla determinazione dei colori delle lamine sottili e di quelli delle frange di diffrazione.

A. HUSSELL. *Sulla rotazione dei raggi ultrarossi nel quarzo.* — Un triprisma di Fresnel sia interposto fra due nicol, in modo che un fascio di luce parallela cada normalmente sulla base del triprisma che si prende per piano $x\,y$ di un sistema coordinato ortogonale, il cui asse delle x sia parallelo agli spigoli del prisma.

Se la direzione delle vibrazioni della luce polarizzata incidente è quella dell' asse y, nella luce omogenea la base del triprisma volta verso l' analizzatore si vede ricoperta di frange nere equidistanti, e la distanza fra due frange è funzione della rotazione che l' unità di spessore del quarzo fa subire al piano di polarizzazione della luce adoprata. Ne segue che con luce bianca, e per nicol incrociati, soltanto la frangia centrale è nera, mentre le altre son colorate come avviene per gli anelli di Newton. Se peraltro davanti alla base del triprisma si pone una fenditura sottile, e si pone un prisma fra l' occhio e l' analizzatore, si ottiene uno spettro, nelle diverse parti del quale i minimi della intensità luminosa hanno fra loro le distanze che competono alle respettive lunghezze d' onda: lo spettro cioè è solcato da strie nere longitudinali, di cui la centrale è parallela alla lunghezza dello spettro, quelle laterali sono invece dei rami di iperbole.

La distanza fra queste strie longitudinali può servire a determinare la rotazione che il quarzo produce nei raggi luminosi; ma l' A., fissando la parte ultrarossa dello spettro mediante il metodo fosforofotografico usato dal Lommel e da Fomm (*N. Cim.* 29, pag. 277) ha potuto determinare anche le rotazioni prodotte nei raggi meno rifrangibili del rosso fino a una lunghezza d'onda $= 1{,}0054\ \mu$.

I valori così misurati sulla fotografia dello spettro ultra rosso concordano con quelli che si deducono dalla formula

$$\rho_0 = \frac{a}{\lambda^2\left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)^2}$$

data dal Lommel, nella quale

$$\log a = 0{,}855\,591\,2\,, \qquad \log \lambda^2_0 = 7{,}9\,351\,257 - 10$$

che vale per la parte visibile dello spettro.

J. RUSSNER. *Sulla dipendenza dell' elasticità del caoutciù dalla temperatura.* — Dalle esperienze del Graetz (cfr. *N. Cim.* 21 pag. 269) resultava che il coefficiente di torsione del caoutciù cresce col crescere della temperatura; invece, da nuove esperienze

fatte dall' A. col metodo stesso del Graetz, è stato ottenuto un resultato affatto opposto.

H. Kayser. *Sulla diffusione e sull' assorbimento nel caoutciù,* — L' A. ha studiato più specialmente l' influenza che su tali fenomeni ha la temperatura, e da prima ha determinato il coefficiente di assorbimento del caoutciù in funzione della pressione e della temperatura, ed ha trovato, come lo fu già anche dal Wroblewski, che è applicabile la legge di Henry per ciò che riguarda la pressione; ma per la temperatura si deve calcolare il coefficiente A_t con la formula

$$A_t = A_0 + Bt + Ct^2 .$$

Circa la diffusione dei gas nel caoutciù l' A. ha trovato per la CO_2 che la velocità della diffusione è nulla a 5° c., e che poi cresce al crescere della temperatura, e analogamente si ha per l' idrogeno. Questo contegno, opposto a quello che si presenta per la diffusione nei fluidi, fa ritenere che il passaggio avvenga allo stato liquido e non allo stato gasoso.

La velocità della diffusione è assai maggiore per l' idrogeno che per l' anidride carbonica; ma queste velocità non sodisfano alla legge del Wroblewski, secondo la quale dovrebbero essere inversamente proporzionali alle radici quadrate dei pesi specifici dei respettivi gas.

J. Müller. *Sulla diffusione dell' ammoniaca nell' acqua e nell' alcole.* — Scopo di queste ricerche è stato di studiare le correnti stazionarie dei gas, e specialmente dell' ammoniaca, in uno strato liquido di spèssore finito, ed esse hanno condotto al resultato che le quantità che si diffondono sono proporzionali direttamente alla sezione e inversamente allo spessore dello strato, e proporzionali anche al coefficiente d' assorbimento e alla radice quadrata della temperatura assoluta.

FINE DEL VOLUME XXXI. SERIE TERZA.

INDICE

RIVISTA